

Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана

Е. Б. Копосов

КИНЕТИКА ЯДЕРНЫХ РЕАКТОРОВ

*Рекомендовано редсоветом МГТУ им. Н. Э. Баумана
в качестве учебного пособия по курсу
«Физика ядерных реакторов»*

Москва
Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана
2005

УДК 621.039.51(075.8)

ББК 31.46

К65

Рецензенты: *А. А. Дорофеев, П. В. Красников*

Копосов Е. Б.

К65 Кинетика ядерных реакторов: Учебное пособие по курсу «Физика ядерных реакторов». — М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2005. — 68 с.

Изложены физические основы нестационарных процессов, происходящих в ядерном реакторе при отсутствии системы управления и температурных обратных связей по реактивности.

Для студентов 4-го курса, обучающихся по специальности «Ядерные реакторы и энергетические установки».

Ил. 19. Табл. 1. Библиогр. 5 назв.

УДК 621.039.51(075.8)

ББК 31.46

Евгений Борисович Копосов

КИНЕТИКА ЯДЕРНЫХ РЕАКТОРОВ

Учебное пособие

Редактор С. А. Серебрякова

Корректор Л. И. Малотина

Компьютерная верстка М. А. Голуб

Подписано в печать 28.07.05. Формат 60×84/16. Бумага офсетная.

Гарнитура Таймс. Печ. л. 4,25. Усл. печ. л. 3,95. Уч.-изд. л. 3,82.

Тираж 100 экз. Изд. № 72. Заказ 542

Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана
105005, Москва, 2-я Бауманская ул., 5

Введение

Основным содержанием курса физики ядерных реакторов, рассматриваемым в предшествующих разделах курса, являются основы теории критического реактора, в котором средняя плотность тепловых нейтронов n не изменяется во времени, т.е. $dn/dt = 0$. Именно при этих условиях и было получено стационарное уравнение диффузии, легко преобразуемое в уравнение критичности.

Раздел физики ядерных реакторов, носящий название «кинетика», посвящен изучению нестационарных состояний реактора, когда средняя плотность тепловых нейтронов является функцией времени. Подобные состояния достаточно часто имеют место при эксплуатации реактора, а именно: при пуске, регулировании мощности, остановке реактора и других переходных режимах, как штатных, так и нештатных, в том числе и аварийных. Изменение плотности нейтронов во времени в этом случае происходит в результате отклонения реактивности $\rho = (k_{\text{эф}} - 1)/k_{\text{эф}}$ (здесь $k_{\text{эф}}$ — эффективный коэффициент размножения нейтронов) от нулевого значения при перемещении органов управления или по другим причинам. Нарушающееся при этом равновесие между скоростью генерации и скоростью убывания нейтронов описывается нестационарным уравнением диффузии.

Нестационарность происходящих в реакторе процессов приводит к ряду существенных особенностей его поведения, чрезвычайно важных для управления ядерным реактором. Изучение этих особенностей и новых явлений, характерных для нестационарного процесса деления ядер горючего в ядерном реакторе, и является предметом изучения раздела физики ядерных реакторов «кинетика ядерного реактора». Для управления реактором необходимо знать кинетику происходящих в нем процессов, поскольку управляемость процесса деления ядер в первую очередь отличает ядерный реактор от атомной бомбы.

1. Уравнения кинетики реактора

1.1. Основные положения кинетики реактора

При изучении нестационарных режимов в одинаковой степени используют и понятие плотности нейтронов n , и понятие плотности потока нейтронов $\Phi = nV$, и понятие мощности W реактора. Это при определенных условиях справедливо, так как в энергетическом диапазоне мощность реактора с достаточной степенью точности пропорциональна средней плотности тепловых нейтронов и количеству делящегося нуклида в активной зоне, которое можно считать постоянным во время коротких переходных процессов.

Рассматривая тот или иной объект, мы обязательно вводим понятие модели объекта, которое включает в себя ряд упрощающих положений, позволяющих в разумной форме представлять рассматриваемый объект.

В общем случае при описании кинетики размножения нейтронов в активной зоне реактора необходимо учитывать пространственную распределенность параметров. В больших активных зонах ядерных реакторов мощных атомных электростанций ($W = 500\dots1000$ МВт) плотность нейтронов может существенно изменяться как по координатам, так и во времени. Могут существовать определенные нестабильности, обусловленные изменением условий размножения нейтронов в различных областях зоны, что приводит к периодическому изменению энерговыделения в различных точках активной зоны реактора и изменению координат максимального энерговыделения. Для обеспечения устойчивой работы подобных реакторов необходимо изучать пространственно-временные процессы. Это предмет более углубленного изучения кинетики.

Если же активная зона реактора имеет небольшие размеры ($V_{az} = 1\dots2$ м³), пространственную распределенность параметров можно не учитывать, полагая, что все параметры активной зоны сосредоточены в одной точке. Уравнения, описывающие кинетику

такого реактора, обычно называют точечной моделью реактора. Так как габариты активных зон транспортных реакторов и части стационарных малы, на данном этапе будем рассматривать принципы составления и использования только точечных моделей реактора.

Кроме названного допущения в инженерных приложениях делают ряд других, позволяющих упростить математическое описание процессов. Так, реальную гетерогенную активную зону с отражателем нейтронов обычно заменяют эквивалентной условно гомогенизированной зоной без отражателя и используют одногрупповое представление спектра нейтронов (все нейтроны считают тепловыми) [1]. Эти два упрощения связаны между собой.

Необходимость учета гетерогенности зоны приводит к обязательности многогруппового представления спектра нейтронов (минимум — двухгруппового), т. е. к резкому усложнению рассматриваемой модели.

Экспериментально доказано, что результаты, полученные с учетом названных допущений, с достаточной степенью точности справедливы для реальных ядерных реакторов. Поэтому перечисленные выше допущения, несмотря на их глобальность, широко используются.

Так как кинетика — это внутреннее свойство реактора, изучение нестационарных процессов размножения нейтронов возможно только при отключенной системе автоматического регулирования мощности. Если же система включена, то изменение мощности (плотности нейтронов) обусловлено в первую очередь изменением выходного сигнала с задатчика мощности. Поведение реактора с подключенной системой регулирования — это предмет изучения других, последующих курсов.

Наконец, следует указать на существование условий, коренным образом влияющих на кинетику размножения нейтронов. Когда увеличение плотности потока нейтронов при положительном скачке реактивности сопряжено с разогревом активной зоны, начинает действовать температурная обратная связь по реактивности, определяющая весь дальнейший ход нестационарного процесса. Если же начальная плотность потока нейтронов столь мала, что ее увеличение при положительном скачке реактивности не приводит в рассматриваемый период к заметному возрастанию температуры ядерного топлива, то характер переходного процесса в значительной

степени отличается от того, который имеет место при разогреве активной зоны. В последнем случае говорят о кинетике «холодного» реактора, или реактора «нулевой мощности». В разделе кинетики курса ФЯР рассматривают кинетику «холодного» реактора, а работу реактора в энергетических режимах с учетом обратных температурных связей рассматривают в курсе «Динамика, управление и безопасность ЯЭУ».

При бомбардировке ядер урана нейтронами происходит деление ядер с освобождением значительной энергии. При каждом акте деления, вызванном одним нейtronом, испускается по два нейтрона и более. Следовательно, при определенных условиях процесс деления ядер урана может быть самоподдерживающимся и сопровождаться непрерывной генерацией тепловой энергии. Ядра изотопов ^{233}U , ^{235}U и ^{239}Pu могут делиться нейтронами любых энергий, тогда как ядра изотопов ^{232}Th и ^{238}U делятся только быстрыми нейтронами.

При делении ядра образуются два осколка с различными массами. В самом общем случае два осколка, образующиеся в одном акте деления, имеют неравные массы; наиболее вероятная масса тяжелого осколка примерно равна 139 а. е. м., легкого — около 95 а. е. м. Распределение осколков деления по массам обычно выражают в виде процентного выхода осколков с данной массой на один акт деления и строят как функцию массового числа осколка (известная из ядерной физики двугорбая кривая).

Образующиеся при делении осколки имеют в своем составе избыточные нейтроны по отношению к устойчивому состоянию ядра. Почти все нейтроны освобождаются мгновенно в момент деления (99,35 % для ^{235}U). Такие нейтроны называют мгновенными. Остальные нейтроны испускаются осколками с задержкой в различные промежутки времени, эти нейтроны называют запаздывающими.

Ядерные реакторы на тепловых или быстрых нейтронах с топливом из ^{235}U , ^{233}U или ^{239}Pu описываются в первом приближении одними и теми же основными уравнениями динамики. Происходящие в различных реакторах процессы по существу идентичны и определяются вызываемым нейтронами делением этих изотопов, сопровождающимся испусканием других нейтронов (обычно двух или трех на акт деления), благодаря чему возможна

самоподдерживающаяся нейтронная цепная реакция. В этом приближении наиболее важное различие между реакторами на быстрых и тепловых нейтронах заключается в скорости размножения нейтронов, а главное различие между видами топлива состоит в том, что каждому из них присуща своя доля запаздывающих нейтронов (не испускаемых непосредственно при делении).

1.2. Основные понятия кинетики и динамики ядерных реакторов

Основные понятия кинетики и динамики ядерных реакторов, общие для всех типов реакторов, — это реактивность, время жизни нейтронов и запаздывающие нейтроны.

Реактивность есть отклонение эффективного коэффициента размножения нейтронов $k_{\text{эфф}}$ от единицы, отнесенное к $k_{\text{эфф}}$. Реактивность является интегральной характеристикой всего реактора. Экспериментальные значения реактивности получают обычно из наблюдений динамического поведения реактора, хотя возможны и статические измерения коэффициента размножения нейтронов. Точечная модель реактора применима только тогда, когда $k_{\text{эфф}}$ очень близок к единице (когда реактор не очень далек от критического состояния), что распространяется на широкий набор практических важных случаев.

Реактивность зависит от размера реактора, относительных количеств и плотностей различных материалов и от нейтронных сечений рассеяния, поглощения и деления. Поскольку на все это влияют изменения температуры, давления и другие процессы, происходящие из-за деления ядер (являющиеся, главным образом, следствием рассеяния кинетической энергии осколков деления), реактивность зависит от предыстории работы реактора. Вычисление этой «обратной связи по реактивности» — одна из центральных проблем динамики реакторов.

Время жизни поколения нейтронов — это среднее время, необходимое для воспроизведения нейтронов в размножающей среде. Оно может быть очень коротким (10^{-8} с) в реакторах на быстрых нейтронах, где деление вызывают быстрые нейтроны, или более длительным (до 10^{-3} с) в реакторах на тепловых нейтронах, где нейтроны, прежде чем вызвать деление, сильно замедляются,

а затем диффундируют при тепловых энергиях. Время жизни зависит главным образом от количества актов рассеяния, которые претерпевает в среднем нейтрон, прежде чем он уйдет из реактора (вследствие утечки) или исчезнет в результате ядерной реакции (вследствие поглощения).

Запаздывающие нейтроны хотя и составляют менее одного процента выхода нейронов при делении, чрезвычайно важны, так как определяют в динамике реакторов характерное время переходных процессов. Эти нейтроны испускаются в определенных ядерных переходах, характерных для некоторых типов сильно возбужденных осколков деления, периоды полураспада которых составляют порядка нескольких секунд.

Когда эффективный коэффициент размножения нейтронов достаточно велик для того, чтобы нейтронная цепная реакция была самоподдерживающейся на одних только мгновенных нейтронах (нейтроны, испускаемые непосредственно при делении), время жизни поколения нейтронов определяет собой характерное время переходных процессов. Когда надкритичность реактора невелика и поддержание цепной реакции без запаздывающих нейтронов невозможно, определяющими становятся сравнительно большие времена запаздывания таких нейтронов, хотя доля их мала. Если бы все нейтроны были мгновенными, было бы чрезвычайно трудно управлять реактором с помощью обычных механических средств, таких как перемещение топлива, поглотителей или отражателя нейтронов. Чтобы скомпенсировать короткое время жизни нейтронов, потребовалось бы чрезвычайно быстroredействующие органы воздействия. Управлять реактором на быстрых нейтронах было бы просто невозможно.

Переходные процессы, определяющие динамику реакторов, по длительности можно условно разбить на следующие группы:

1) быстрые процессы: микросекунды — секунды (ядерные взрывы, процессы в импульсных реакторах, реакторные аварии);

2) процессы малой длительности: минуты — часы (запуск реактора, изменения реактивности при изменениях уровня мощности, колебания внешней нагрузки атомной электростанции, отравление продуктами деления);

3) процессы большой длительности: дни — месяцы (выгорание топлива, производство тяжелых изотопов, расширенное

воспроизведение и конверсия топлива, воздействие радиации на материалы).

Традиционно в разделе кинетики рассматриваются быстрые процессы и процессы малой длительности. Процессы большой длительности описаны в других разделах ФЯР.

Теперь рассмотрим несколько подробнее основные понятия кинетики ядерных реакторов.

Мгновенные и запаздывающие нейтроны. Из ядерной физики известно, что соотношение нейтронов и протонов у стабильных нуклидов существенно зависит от их массовых чисел. У легких стабильных ядер число нейтронов равно или незначительно превышает число протонов в ядре, а у тяжелых стабильных ядер нейтронов примерно в 1,5 раза больше, чем протонов. В результате этого ядра — осколки деления, массовые числа которых всегда значительно меньше массовых чисел исходных делящихся нуклидов, в момент образования перенасыщены нейтронами по сравнению со стабильным состоянием ядер с соответствующими малыми массовыми числами. По этой причине деление ядер сопровождается испусканием избыточных нейтронов в процессе образования стабильных нуклидов из возбужденных осколков деления.

Обычно ядро-осколок, образующееся в момент деления, не только обладает избытком нейтронов, но и оказывается сильно деформированным по сравнению со стационарной формой. Как правило, потенциальная энергия, обусловленная указанной деформацией, позволяет ядру немедленно «избавиться» от одного или нескольких избыточных нейтронов, которые испускаются за время расщепления ядра ($\sim 10^{-14}$ с) и поэтому называются мгновенными нейтронами. За это время испускаются и мгновенные γ -кванты. В некоторых исключительных случаях потенциальная энергия деформации ядра-осколка может быть настолько большой, что этот осколок самопроизвольно подвергается вторичному расщеплению.

Дальнейшее уменьшение числа избыточных нейтронов происходит путем превращения некоторых из них в протоны. Этот процесс является причиной β -распада ядер-осколков, так как превращение нейтрона в протон сопровождается испусканием электрона. Продолжается β -распад до тех пор, пока отношение нейтронов и протонов в ядре не достигнет уровня стабильности. В это же время в результате перегруппировки нуклидов для более полного

заполнения всех ядерных оболочек осколки деления испускают γ -кванты.

В качестве примера последовательного β -распада осколков деления в процессе образования стабильных нуклидов можно рассмотреть представленную на рис. 1 схему распада нестабильного ^{87}Br , обладающего периодом полураспада 55,7 с [2].

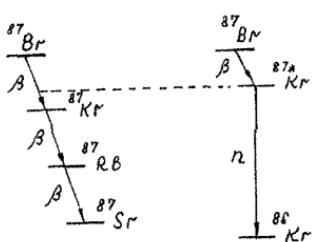


Рис. 1. Энергетические схемы β -распада Br без образования и с образованием запаздывающих нейтронов

В редких случаях (для ^{87}Br примерно в двух случаях из ста) в результате β -распада ядра-осколка может произойти значительная перегруппировка нуклонов на ядерных оболочках, сопровождаемая необычно сильным возбуждением вновь образовавшегося ядра и уменьшением его энергии связи. Немедленно вслед за этим происходит испускание нейтрона с образованием

стабильного ядра. Полученные таким образом нейтроны называют запаздывающими, поскольку они могут испускаться через несколько секунд или даже десятков секунд после первоначального расщепления.

В принятой терминологии ^{87}Br как ядро-носитель, непосредственно не испускающее запаздывающий нейtron, называют ядром-предшественником запаздывающего нейтрона, а ^{87}Kr — ядром-излучателем.

Помимо ^{87}Br среди продуктов деления известны и другие ядра-предшественники запаздывающих нейтронов. Вопрос о точном количестве ядер-предшественников запаздывающих нейтронов имеет чисто научный интерес, так как и без этой информации теория хорошо совпадает с экспериментом при объединении всех ядер-предшественников в шесть условных групп, каждая из которых характеризуется периодом полураспада ($T_{1/2}$): (или средним временем жизни $t_i = (T_{1/2})/0,693$, или постоянной распада $\lambda_i = 1/t_i$), долей выхода β_i и средней энергией E_i испускаемых запаздывающих нейтронов. Названные параметры различны у разных делящихся нуклидов и зависят от энергии нейтронов, вызвавших деление. Характеристики ядер-предшественников запаздывающих нейтронов, получаемых при делении ^{235}U тепловыми нейтронами, представлены в таблице.

Номер группы <i>i</i>	Относительный выход β_i/β	Период полураспада $(T_{1/2})_i$, с	Постоянная распада λ_i , с ⁻¹
1	0,033	55,72	0,0124
2	0,219	22,72	0,0305
3	0,196	6,22	0,111
4	0,395	2,30	0,301
5	0,115	0,61	1,14
6	0,042	0,23	3,01

Относительный выход ядер-предшественников запаздывающих нейтронов *i*-й группы определен в таблице как частное от деления β_i/β , где $\beta = \sum_1^6 \beta_i$ — суммарная доля ядер-предшественников запаздывающих нейтронов (для простоты β называют обычно суммарной долей запаздывающих нейтронов). Во многих случаях и остальные характеристики ядер-предшественников для упрощения приписывают запаздывающим нейtronам.

При делении ^{235}U тепловыми нейтронами в критическом состоянии $\beta = 0,0065$. Это существенно большие суммарной доли запаздывающих нейтронов при делении ^{239}Pu ($\beta = 0,0021$) и ^{233}U ($\beta = 0,00264$). Вполне понятно, что доля мгновенных нейтронов во всех случаях составляет $1 - \beta$.

Каждая группа запаздывающих нейтронов характеризуется своим значением средней энергии. Если выполнить усреднение энергии запаздывающих нейтронов всех групп

$$\bar{E}_{\text{зап}} = \frac{\sum_{i=1}^6 \beta_i E_i}{\beta},$$

то получится, что средняя энергия запаздывающих нейтронов составляет около 0,5 МэВ. Это примерно в 4 раза меньше средней энергии мгновенных нейтронов ($\bar{E}_{\text{мгн}} \approx 2$ МэВ).

Так как исходная энергия запаздывающих нейтронов меньше, чем мгновенных, а конечная энергия, при достижении которой нейтроны считаются тепловыми (энергия сшивки), для всех нейтронов одна и та же, возраст тепловых нейтронов, полученных в результате

замедления запаздывающих нейтронов ($\tau_{\text{зап}}$), меньшее возраста тепловых нейтронов, полученных в результате замедления мгновенных нейтронов ($\tau_{\text{мгн}}$). Из этого следует, что вероятность избежать утечки в процессе замедления $P = \exp(-B^2\tau)$ для запаздывающих нейтронов выше, чем для мгновенных (здесь B^2 – геометрический параметр, величина которого определяется формой и размерами активной зоны). Значит, запаздывающие нейтроны обладают более высокой потенциальной способностью к дальнейшему размножению, чем мгновенные. Это свойство запаздывающих нейтронов характеризуется так называемой ценностью запаздывающих нейтронов.

Приближенной количественной характеристикой ценности запаздывающих нейтронов может служить отношение

$$\gamma \approx \frac{P_{\text{зап}}}{(1 - \beta)P_{\text{мгн}} + \beta P_{\text{зап}}} = \frac{\exp(-B^2\tau_{\text{зап}})}{(1 - \beta) \exp(-B^2\tau_{\text{мгн}}) + \beta \exp(-B^2\tau_{\text{зап}})},$$

или

$$\gamma = \frac{1}{(1 - \beta) \exp[-B^2(\tau_{\text{мгн}} - \tau_{\text{зап}})] + \beta}.$$

Выше было показано, что возраст $\tau_{\text{зап}} < \tau_{\text{мгн}}$. Вследствие этого в общем случае $\gamma > 1$. Только для реактора бесконечных размеров $\gamma = 1$, так как при любой энергии нейтронов утечка их из активной зоны исключена, в результате чего запаздывающие нейтроны не имеют преимуществ перед мгновенными. По мере уменьшения размеров активной зоны γ все больше и больше превышает единицу.

Для водо-водяных реакторов ценность запаздывающих нейтронов может быть вычислена с использованием эмпирической зависимости

$$\gamma \approx 1 + 20B^2.$$

У транспортных водо-водяных реакторов обычно $\gamma = 1,05 \dots 1,1$.

Различие в ценности запаздывающих и мгновенных нейтронов учитывается фиктивным увеличением доли запаздывающих нейтронов, т. е. считается, что запаздывающие нейтроны имеют такую же среднюю энергию, как и мгновенные, но эффективная доля этих запаздывающих нейтронов $\beta_{\text{зф}}$ превышает фактическую β . Это увеличение доли запаздывающих нейтронов осуществляется

посредством умножения β на ценность запаздывающих нейтронов: $\beta_{\text{зф}} = \gamma\beta$.

Наряду с рассмотренными выше запаздывающими нейтронами в активной зоне существуют также запаздывающие фотонейтроны, образующиеся в результате взаимодействия испускаемых осколками деления γ -квантов с ядрами берилля или дейтерия, на которых идет реакция γ, n . Для реакторов, где замедлителем является дейтерий или бериллий, запаздывающие фотонейтроны учитывают в виде одной или нескольких дополнительных групп запаздывающих нейтронов. При изучении кинетики водо-водяных реакторов влиянием запаздывающих фотонейтронов можно пренебречь.

Среднее время жизни поколения нейтронов. При изучении кинетики размножения нейтронов важное значение имеет понятие среднего времени жизни поколения мгновенных нейтронов, определяемого в результате суммирования времени расщепления t_p ядер, времени замедления t_3 быстрых нейтронов и времени диффузии t_d тепловых нейтронов:

$$\ell = t_p + t_3 + t_d.$$

В данном случае временем расщепления $t_p \sim 10^{-14}$ с можно пренебречь по сравнению с двумя остальными слагаемыми выражения для среднего времени жизни поколения мгновенных нейтронов, которые для водо-водяных реакторов составляют в сумме порядка 10^{-4} с, причем время диффузии по крайней мере на порядок больше времени замедления.

Существенные отличия от указанного среднего времени жизни поколения возникают при учете запаздывающих нейтронов, применительно к которым смысл времени расщепления имеет среднее время жизни ядер-предшественников. С учетом того, что эффективная доля мгновенных нейтронов равна $(1 - \beta_{\text{зф}})$, среднее время жизни $\bar{\ell}$ поколения с учетом запаздывающих нейтронов в предположении, что времена замедления мгновенных и запаздывающих нейтронов равны между собой, составит

$$\bar{\ell} = (1 - \beta_{\text{зф}})(t_p + t_3 + t_d) + \sum_{i=1}^6 \beta_{\text{зфи}}(t_i + t_3 + t_d).$$

Первое слагаемое в этом равенстве определяет вклад мгновенных, а второе — вклад запаздывающих нейтронов. Так как $t_p \approx 0$,

а сумма $t_{\text{д}} + t_3$ с высокой точностью может быть приравнена к ℓ , приведенная зависимость преобразуется к виду

$$\bar{\ell} = (1 - \beta_{\text{зф}})\ell + \sum_{i=1}^6 \beta_{\text{зф}i} t_i + \sum_{i=1}^6 \beta_{\text{зф}i} \ell,$$

откуда

$$\bar{\ell} = \ell + \sum_{i=1}^6 \beta_{\text{зф}i} t_i.$$

Здесь $\sum_{i=1}^6 \beta_{\text{зф}i} t_i$ — среднее время задержки запаздывающих нейтронов, среднее время жизни с учетом запаздывающих нейтронов для ^{235}U при $\beta_{\text{зфи}} = \beta_i$ равно $\bar{\ell} = 0,0834$ с.

Таким образом, наличие запаздывающих нейтронов, доля которых менее 1 %, обусловливает примерно тысячекратное увеличение среднего времени жизни поколения нейтронов: $\bar{\ell}/\ell \approx 10^3$. Это объясняется тем, что среднее время жизни запаздывающих нейтронов для ^{235}U

$$\ell_{\text{зн}} = \frac{1}{\beta} \sum_{i=1}^6 \beta_i t_i = 13 \text{ с}$$

в сотни тысяч раз превосходит среднее время жизни мгновенных нейтронов ($\sim 10^{-4}$ с).

С учетом введенного понятия $\ell_{\text{зн}}$ выражение для среднего времени жизни поколения с учетом запаздывающих нейтронов может быть представлено в виде

$$\bar{\ell} = \ell + \beta_{\text{зф}} \ell_{\text{зн}}.$$

Указанное увеличение среднего времени жизни поколения за счет наличия запаздывающих нейтронов имеет решающее значение для обеспечения безопасного управления процессом размножения нейтронов.

1.3. Элементарное уравнение кинетики

Для простоты будем считать, что все нейтроны испускаются без запаздывания, реактор «холодный» и параметры реактора сосредоточены в точке при одногрупповом приближении спектра нейтронов.

Выберем в качестве исходного критическое состояние реактора ($k_{\text{ср}} = 1$) при средней плотности нейтронов в активной зоне, равной n_0 нейтр/см³. Пусть в некоторый момент времени скачкообразно создается надкритичность $\delta k_{\text{ср}} = k_{\text{ср}} - 1$, вследствие чего средняя плотность нейтронов в активной зоне увеличивается.

Так как в соответствии с определением эффективного коэффициента размножения на каждый тепловой нейtron предыдущего поколения образуется $k_{\text{ср}}$ тепловых нейтронов последующего поколения, то после создания надкритичности $\delta k_{\text{ср}} > 0$ уже в следующем поколении после внесения возмущения средняя плотность нейтронов увеличится до уровня $n_0 k_{\text{ср}}$. Следовательно, возрастание средней плотности нейтронов за время жизни ℓ одного поколения составит $n k_{\text{ср}} - n = n \delta k_{\text{ср}}$, а скорость изменения плотности нейтронов

$$\frac{dn}{dt} = \frac{n \delta k_{\text{ср}}}{\ell}. \quad (1.1)$$

Это выражение называется обычно элементарным уравнением кинетики реактора, так как в основе его лежит грубое допущение об отсутствии запаздывающих нейтронов.

В результате интегрирования (1.1) получим решение элементарного уравнения кинетики, определяющее изменение плотности нейтронов во времени при скачкообразном изменении $k_{\text{ср}}$:

$$n = n_0 \exp\left(\frac{\delta k_{\text{ср}}}{\ell} t\right), \quad (1.2)$$

где n_0 — плотность нейтронов в начальный момент времени $t = 0$, когда было внесено возмущение по реактивности.

Полученные зависимости свидетельствуют о том, что при скачкообразном изменении реактивности от исходного нулевого значения плотность нейтронов согласно элементарному уравнению кинетики изменяется по экспоненциальному закону (рис. 2).

Для количественной характеристики темпа изменения плотности нейтронов в теории реакторов используется период изменения плотности нейтронов (период

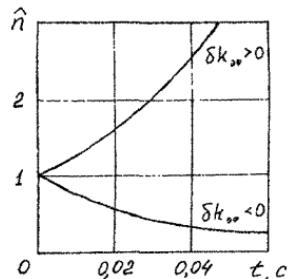


Рис. 2. Изменение относительной плотности нейтронов во времени без учета запаздывающих нейтронов ($\hat{n} = n/n_0$)

реактора), представляющий собой время, в течение которого мощность реактора изменяется в e раз при постоянном значении $\delta k_{\text{эф}}$. Обозначают период реактора обычно T_e , измеряют в секундах. Простейшее выражение, определяющее период реактора, может быть получено из предыдущего выражения, которое для этого удобно переписать в виде

$$\frac{n}{n_0} = \exp\left(\frac{\delta k_{\text{эф}}}{\ell} t\right). \quad (1.3)$$

По определению периода изменения плотности нейтронов при $t = T_e$ отношение $n/n_0 = e$. Значит, (1.3) можно переписать в виде

$$\frac{n}{n_0} = e = \exp\left(\frac{\delta k_{\text{эф}}}{\ell} T_e\right).$$

Так как равенство экспонент возможно только при равенстве показателей их степеней, то

$$1 = \left(\frac{\delta k_{\text{эф}}}{\ell} T_e\right) \quad \text{и} \quad T_e = \frac{\ell}{\delta k_{\text{эф}}}.$$

Используя полученное выражение для периода, можно преобразовать решение элементарного уравнения кинетики реактора:

$$n = n_0 \exp\left(\frac{t}{T_e}\right).$$

Предваряя события, следует сказать, что такой характер изменения плотности нейтронов справедлив в действительности только в некоторых частных случаях, о которых будет сказано ниже. Фактическая зависимость $n = f(\delta k_{\text{эф}}, t)$, к рассмотрению которой мы еще вернемся, имеет более сложный характер (рис. 3).

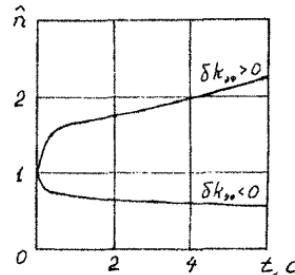


Рис. 3. Изменение относительной плотности нейтронов во времени с учетом запаздывающих нейтронов ($\hat{n} = n/n_0$)

Как видно из сопоставления кривых, представленных на рис. 2 и 3, учет запаздывающих нейтронов не только изменяет характер переходного процесса, но и существенно снижает темп изменения мощности (обратите внимание на масштаб времени по оси абсцисс на обоих графиках). Наличие запаздывающих нейтронов в рамках элементарного уравнения кинетики может быть учтено при вычислении периода посредством замены среднего

времени жизни поколения мгновенных нейтронов на среднее время жизни поколения с учетом запаздывающих нейтронов $\bar{\ell}$:

$$T_e = \frac{\bar{\ell}}{\delta k_{\text{эфф}}}, \quad (1.4)$$

но и при этом точность вычисления периода реактора остается невысокой, так как само выражение (1.4) получено из элементарного уравнения кинетики, при выводе которого все нейтроны считались мгновенными.

Замедление процессов при учете запаздывающих нейтронов можно наглядно проиллюстрировать с использованием элементарного уравнения кинетики реактора. Так, если задаться $\delta k_{\text{эфф}} = 10^{-3}$ и считать, что $\ell = 10^{-4}$ с, а $\bar{\ell} = 10^{-1}$ с, то в первом случае, когда все нейтроны считаются мгновенными, за 1 с плотность нейтронов (мощность реактора) согласно (1.2) увеличилась бы в $e^{\frac{10^{-3} \cdot 1}{10^{-4}}} = e^{10} \approx 20000$ раз, а во втором случае — в $e^{\frac{10^{-3} \cdot 1}{10^{-1}}} = e^{0,01} \approx 1,01$ раза.

На практике часто используют период удвоения мощности T_2 , представляющий собой время, в течение которого плотность нейтронов в реакторе увеличивается в 2 раза при постоянном значении $\delta k_{\text{эфф}}$. Из этого определения следует равенство

$$2 = \exp\left(\frac{\delta k_{\text{эфф}}}{\ell} T_2\right),$$

логарифмируя которое, получаем

$$T_2 = \frac{\ell}{\delta k_{\text{эфф}}} \ln 2.$$

Сопоставление T_2 с T_e позволяет заключить, что $T_2 = 0,693 T_e$. Уточнить это выражение можно, так же как и предыдущее, посредством замены ℓ на $\bar{\ell}$:

$$T_2 = \frac{\bar{\ell}}{\delta k_{\text{эфф}}} 0,693. \quad (1.5)$$

Эта зависимость позволяет приблизенно оценить реактивность $\rho \approx \delta k_{\text{эфф}}$ по экспериментально измеренному периоду удвоения мощности. Соответствующая расчетная формула может быть получена из (1.5) при подстановке туда значения $\bar{\ell} = 0,0834$ с:

$$\rho \approx 0,058/T_2.$$

Очевидно, чем меньше реактивность, тем больший период удвоения мощности. В критическом состоянии ($\rho = 0$) период бесконечен, что соответствует постоянству плотности потока нейтронов, т. е. постоянству мощности реактора.

1.4. Базовые уравнения кинетики реактора

Нестационарная диффузия нейтронов в реакторе может быть описана с помощью уравнения

$$\frac{dN(r, t)}{dt} = Dv\nabla^2 N(r, t) - \Sigma_a v N(r, t) + S(r, t), \quad (1.6)$$

где $N(r, t)$ — количество нейтронов в единичном элементе объема в точке r в момент времени t ; $Dv\nabla^2 N$ — количество нейтронов, диффундирующих в единичный элемент объема за единичный интервал времени в момент времени t ; $\Sigma_a v N$ — количество нейтронов, поглощаемых в единичном элементе объема за единичный интервал времени в момент времени t ; $S(r, t)$ — количество нейтронов, генерируемых в единичном элементе объема за единичный интервал времени в момент времени t . Величины D , v и Σ_a — соответственно коэффициент диффузии, скорость нейтронов и макроскопическое сечение поглощения нейтронов, осредненные соответствующим образом по спектру нейтронов.

Ограничимся рассмотрением тех случаев, когда D , v и Σ_a не зависят от координат.

Уравнение (1.6) — простейшее приближенное уравнение, применяемое для изучения динамического поведения многих типов реакторов. Часто под N понимают нейтроны только той области энергий, в которой происходит подавляющая часть делений (например, тепловые нейтроны в тепловом реакторе). Тогда источником S являются нейтроны, поступающие в эту область за счет замедления из областей более высоких энергий. Простейший подход предполагает, что все процессы происходят при одной определенной энергии нейтронов, а N — полная плотность нейтронов всех энергий.

При таком подходе плотность генерации быстрых нейтронов в стационарном состоянии определяется выражением $k_\infty \Sigma_a v N$, где k_∞ — коэффициент размножения нейтронов в бесконечной размножающей среде.

В нестационарном случае мгновенные и запаздывающие нейтроны должны рассматриваться отдельно. Если β — доля запаздывающих нейtronов, то вклад мгновенных нейtronов в суммарную мощность источника S равен $(1 - \beta)k_{\infty}\Sigma_a v N$. Запаздывающие нейtronы, как рассматривалось выше, возникают при радиоактивном распаде определенных ядер из числа осколков деления (так называемые ядра-предшественники запаздывающих нейtronов). Если λ_i — постоянная распада, а $C_i(r, t)$ — плотность ядер-предшественников i -й группы, то вклад запаздывающих нейtronов в суммарную мощность источника S равен $\sum_i \lambda_i C_i$.

С учетом внешнего источника нейtronов $S_0(r, t)$, не связанного с процессом деления, находим, что

$$S = (1 - \beta)k_{\infty}\Sigma_a v N + \sum_i \lambda_i C_i + S_0.$$

Уравнение нестационарной диффузии нейtronов принимает вид

$$\frac{dN}{dt} = Dv\nabla^2 N - \Sigma_a v N + (1 - \beta)k_{\infty}\Sigma_a v N + \sum_i \lambda_i C_i + S_0.$$

Пусть β_i — доля запаздывающих нейtronов, возникающих при распаде ядер-предшественников i -й группы, так что $\beta = \sum_i \beta_i$. Предполагая, что миграция осколков деления пренебрежимо мала, что достаточно справедливо, за исключением случая реактора с циркулирующим топливом, где такое предположение неприменимо, находим, что

$$\frac{dC_i}{dt} = \beta_i k_{\infty}\Sigma_a v N - \lambda_i C_i.$$

Уравнения для N и C_i образуют систему приближенных уравнений динамики. В реальности некоторые или даже все коэффициенты, входящие в эти уравнения, могут зависеть от времени из-за изменений, происходящих в реакторе по внешним причинам, или из-за изменений мощности реактора, однако, ограничимся только случаем их постоянства. Ограничимся также рассмотрением только тех случаев, когда функции N и C_i допускают разделение переменных r и t . Разделение переменных означает, что в разложениях N и C_i по собственным функциям можно пренебречь всеми гармониками, кроме основных. Это справедливо только тогда, когда реактор

очень близок к критическому состоянию и при этом нет больших локальных возмущений. Итак, предположим, что

$$N(r, t) = f(r)n(t); \quad C_i(r, t) = g_i(r)c_i(t). \quad (1.7)$$

Уравнение для C_i принимает вид

$$\frac{dc_i(t)}{dt} = \beta_i k_\infty \Sigma_a v \frac{f(r)}{g_i(r)} n(t) - \lambda_i c_i(t). \quad (1.8)$$

Отметим, что отношение $f(r)/g_i(r)$ не зависит от времени. Далее, если мы хотим, чтобы решение уравнения (1.8) не зависело от координат, необходимо предположить, что функции f и g_i отличаются только постоянным множителем. (Другой путь получения уравнений, не содержащих пространственной зависимости, — интегрирование уравнений для N и C_i по объему реактора; обсуждение его выходит за рамки нашего рассмотрения.)

Удобно принять, что $f/g_i = 1$, тогда уравнение (1.8) принимает вид

$$\frac{dc_i}{dt} = \beta_i k_\infty \Sigma_a v n - \lambda_i c_i. \quad (1.9)$$

Подставляя выражения (1.7) в уравнение для плотности нейтронов n , находим:

$$\begin{aligned} \frac{dn}{dt} = Dv \frac{\nabla^2 f}{f} n(t) - \Sigma_a v n(t) + (1 - \beta) k_\infty \Sigma_a v n(t) + \\ + \sum_i \lambda_i \frac{g_i}{f} c_i(t) + \frac{S_0}{f}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Здесь для устранения пространственной зависимости кроме условия $g_i = f$ необходимо, чтобы $\nabla^2 f/f$ и S_0/f не зависели от координат. Первое из этих требований эквивалентно предположению, что функция $f(r)$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца $\nabla^2 f + B^2 f = 0$, где постоянная B^2 именуется лапласианом (или баклингом) системы. Требование независимости отношения S_0/f от координат является характерной особенностью примененного способа вывода уравнений без пространственной зависимости. Предполагая далее, что функция S_0 зависит от координат таким же образом, что и функция f , примем, что

$$q(t) = \frac{S_0(r, t)}{f(r)}.$$

Введем еще два символа: ℓ_∞ – среднее время жизни нейтрона до его поглощения и L – длина диффузии нейронов:

$$\ell_\infty = \frac{1}{v\Sigma_a}; \quad L^2 = \frac{D}{\Sigma_a},$$

откуда

$$D = L^2\Sigma_a \quad \text{и} \quad v = \frac{1}{\Sigma_a\ell_\infty}.$$

Величину ℓ_∞ можно также называть средним временем жизни нейтрона в бесконечной среде, а L^2 можно интерпретировать как «площадь диффузии».

Если $\nabla^2 f + B^2 f = 0$, то $\nabla^2 f/f = -B^2$, и первый член в уравнении (1.10) имеет вид

$$Dv \frac{\nabla^2 f}{f} n = -\frac{L^2}{\ell_\infty} B^2 n.$$

Второй член этого же уравнения преобразуется к виду

$$\Sigma_a v n = \frac{n}{\ell_\infty},$$

третий член – к виду

$$(1 - \beta)k_\infty \Sigma_a v n = (1 - \beta)k_\infty \frac{n}{\ell_\infty}.$$

Тогда уравнение (1.10) преобразуется:

$$\frac{dn}{dt} = -\frac{L^2}{\ell_\infty} B^2 n - \frac{n}{\ell_\infty} + (1 - \beta)k_\infty \frac{n}{\ell_\infty} + \sum_i \lambda_i c_i + q.$$

После компоновки первых трех членов, имеющих общий множитель n/ℓ_∞ , последнее уравнение примет вид

$$\frac{dn}{dt} = \frac{(1 - \beta)k_\infty - (1 + L^2 B^2)}{\ell_\infty} n + \sum_i \lambda_i c_i + q.$$

Определим эффективный коэффициент размножения нейронов k_{ϕ} и среднее время жизни нейтронов в реакторе ℓ_0 следующим образом:

$$k_{\phi} = \frac{k_\infty}{1 + L^2 B^2}; \quad \ell_0 = \frac{\ell_\infty}{1 + L^2 B^2}.$$

Тогда

$$\frac{dn}{dt} = \frac{(1 - \beta)k_{\phi}(1 + L^2 B^2) - (1 + L^2 B^2)}{\ell_0(1 + L^2 B^2)} n + \sum_i \lambda_i c_i + q. \quad (1.11)$$

Перепишем уравнения (1.11) и (1.9), используя новые обозначения:

$$\frac{dn}{dt} = \frac{k_{\text{зф}} - 1 - \beta k_{\text{зф}}}{\ell_0} n + \sum_i \lambda_i c_i + q; \quad (1.12)$$

$$\frac{dc_i}{dt} = \frac{\beta_i k_{\text{зф}}}{\ell_0} n - \lambda_i c_i. \quad (1.13)$$

Действительно, в (1.9)

$$\beta_i k_{\infty} \Sigma_a v n = \beta_i \frac{k_{\infty}}{\ell_{\infty}} n = \beta_i k_{\text{зф}} \frac{1 + L^2 B^2}{\ell_0 (1 + L^2 B^2)} n = \frac{\beta_i k_{\text{зф}}}{\ell_0} n.$$

Уравнения (1.12) и (1.13) соответствуют точечной модели реактора и содержат в явном виде среднее время жизни нейтронов в реакторе ℓ_0 . Обратим внимание на член $-n/\ell_0$ в уравнении (1.12). Это скорость спада плотности нейтронов в реакторе в отсутствие источников нейтронов всех видов.

Уравнения можно записать в другой форме, используя понятие о среднем времени генерации нейтронов в реакторе $\ell = \ell_0/k_{\text{зф}}$. Этот термин обязан своим происхождением члену $k_{\text{зф}} n / \ell_0$ в уравнении (1.12), описывающему скорость генерации нейтронов. Вспомним понятие реактивности ρ , определив эту величину формулой

$$\rho = \frac{k_{\text{зф}} - 1}{k_{\text{зф}}}.$$

Тогда

$$\frac{k_{\text{зф}} - 1 - \beta k_{\text{зф}}}{\ell_0} n = \frac{\rho k_{\text{зф}} - \beta k_{\text{зф}}}{\ell_0} n = \frac{\rho - \beta}{\ell} n$$

и уравнения (1.12) и (1.13) преобразуются так:

$$\begin{aligned} \frac{dn}{dt} &= \frac{\rho - \beta}{\ell} n + \sum_i \lambda_i c_i + q; \\ \frac{dc_i}{dt} &= \frac{\beta_i}{\ell} n - \lambda_i c_i. \end{aligned}$$

В таком виде уравнения и используются в нашем курсе.

Отметим, что $n(t)$ допустимо выражать в любых единицах, если только размерности n и c одинаковы, и при условии, что функция q (нормированная должным образом) выражена в единицах dn/dt . Поскольку предполагается, что пространственное распределение плотности нейтронов не зависит от времени, под n может пониматься какая-либо интегральная или осредненная по объему характеристика реактора, которая пропорциональна плотности

нейтронов в любой точке реактора и в любой момент времени (например, полное количество нейтронов в реакторе, скорость деления ядер, полная мощность реактора или средняя удельная мощность). Из вышесказанного следует, что термины «мощность» и «плотность нейтронов» используются как взаимозаменяемые, о чем мы уже говорили.

Детали устройства гетерогенного реактора, в котором топливо и замедлитель полностью или частично разделены, не учитываются в рамках точечной модели реактора. Конечно, такие детали влияют на расчет параметров, используемых в модели, но эти параметры отражают только интегральные свойства реактора в целом. Вызываемые нейронами различной энергии эффекты, которые в ряде случаев чрезвычайно сложны, также нельзя учесть в рамках этой модели. Возможна только некоторая коррекция параметров. Обычно для каждого члена в уравнении (1.12) требуются разные поправочные коэффициенты, так как мгновенные нейтроны, запаздывающие нейтроны и нейтроны внешнего источника имеют разную среднюю энергию.

Поскольку запаздывающие нейтроны рождаются с более низкими энергиями, чем энергии мгновенных нейтронов, для них характерны в среднем меньшие эпитепловые утечки и эпитепловой захват. Это учитывается введением эффективных долей запаздывающих нейтронов, для которых часто используются обозначения $\gamma\beta_i$ и $\gamma\beta$, причем множитель γ может достигать значения 1,3 для малых тепловых реакторов с водяным замедлителем [3].

При более детальном подходе необходимо учитывать, что каждый из излучателей запаздывающих нейтронов дает свой спектр нейтронов, что приводит к различным поправочным коэффициентам для каждой из величин β_i . В точечной модели реактора в том виде, как она здесь используется, символ β применяется для обозначения эффективной доли запаздывающих нейтронов. Каждый реактор характеризуется своим значением величины β , а каждый вид топлива – своими значениями отношений β_i/β .

Энергетический спектр нейтронов в реакторе может изменяться в ходе нестационарного процесса, что приводит к изменению численных значений параметров, осредняемых при их вычислении по спектру нейтронов. Конечно, изменение спектра нейтронов – это только одна составляющая целого комплекса процессов,

включающего процессы изменения плотности, температуры и т. д. Все эти процессы чрезвычайно важны при вычислении реактивности, но их влиянием на другие параметры точечной модели реактора обычно можно пренебречь.

Наличие в реакторе смеси из нескольких видов топлива, с каждым из которых связан свой набор характеристик запаздывающих нейтронов, также вызывает осложнения.

Главный недостаток точечной модели реактора состоит в том, что она непригодна для описания динамических эффектов, появляющихся при изменениях пространственного распределения нейтронных потоков в ходе нестационарных процессов. Проявление этих эффектов определяется конечной скоростью распространения в пространстве локальных возмущений нейтронного потока, и они часто чрезвычайно важны в больших реакторах. При больших отклонениях от критического состояния даже для малых реакторов точечная модель реактора становится неудовлетворительной.

Наконец, следует отметить, что диффузия нейтронов и деление ядер являются дискретными процессами, требующими в предельном случае статистического рассмотрения. Точечная модель реактора, теория диффузии нейтронов и теория переноса нейтронов, имеющие дело с непрерывными распределениями, в состоянии дать только приближенное описание стохастических процессов, лежащих в их основе.

Точечная модель реактора может быть выведена из элементарного стохастического описания процессов, происходящих в реакторе.

1.5. Нормировка уравнений кинетики

При моделировании физических процессов часто значительно удобнее оперировать не абсолютными величинами, а относительными, для чего нужно проводить нормировку уравнений. Базовая система дифференциальных уравнений кинетики для холодного реактора в пренебрежении внешним источником имеет вид:

$$\frac{dn}{dt} = \frac{\rho - \beta}{\ell} n + \sum_i \lambda_i c_i,$$

$$\frac{dc_i}{dt} = \frac{\beta_i}{\ell} n - \lambda_i c_i, \quad i = 1, \dots, 6.$$

Обычно при приведении системы уравнений к безразмерному виду плотность нейтронов n и концентрация ядер предшественников c_i нормируются на их начальные значения, а реактивность — на долю запаздывающих нейтронов β .

Введем эти нормированные значения:

$$\hat{n} = \frac{n}{n_0}; \quad \hat{c}_i = \frac{c_i}{c_{i0}}; \quad \hat{\rho} = \frac{\rho}{\beta}.$$

Кроме того, обозначим $\alpha_i = \frac{\beta_i}{\beta}$ — относительный выход ядер предшественников запаздывающих нейтронов.

Отсюда записываем выражения

$$n = \hat{n}n_0; \quad c_i = c_{i0}\hat{c}; \quad \rho = \hat{\rho}\beta; \quad \beta_i = \alpha_i\beta$$

и, соответственно,

$$\frac{dn}{dt} = n_0 \frac{d\hat{n}}{dt}; \quad \frac{dc_i}{dt} = c_{i0} \frac{d\hat{c}_i}{dt}.$$

Подставим полученные соотношения в систему:

$$\begin{cases} n_0 \frac{d\hat{n}}{dt} = \frac{\hat{\rho}\beta - \beta}{\ell} \hat{n}n_0 + \sum_i \lambda_i c_{i0} \hat{c}_i; \\ c_{i0} \frac{d\hat{c}_i}{dt} = \frac{\alpha_i \beta}{\ell} \hat{n}n_0 - \lambda_i c_{i0} \hat{c}_i. \end{cases}$$

Из уравнения для концентрации ядер предшественников можем выразить c_{i0} (когда $dc_i/dt = 0$) — стационарное значение:

$$c_{i0} = \frac{\beta_i n_0}{\ell \lambda_i} = \frac{\alpha_i \beta n_0}{\ell \lambda_i}.$$

Подставим выражение для c_{i0} :

$$\begin{cases} n_0 \frac{d\hat{n}}{dt} = \frac{\beta(\hat{\rho} - 1)}{\ell} \hat{n}n_0 + \sum_i \lambda_i \frac{\alpha_i \beta n_0}{\ell \lambda_i} \hat{c}_i; \\ \frac{\alpha_i \beta n_0}{\ell \lambda_i} \frac{d\hat{c}_i}{dt} = \frac{\alpha_i \beta}{\ell} \hat{n}n_0 - \lambda_i \frac{\alpha_i \beta n_0}{\ell \lambda_i} \hat{c}_i. \end{cases}$$

Сократив первое уравнение на n_0 , а второе — на комплекс $\frac{\alpha_i \beta n_0}{\ell}$, получим

$$\begin{cases} \frac{d\hat{n}}{dt} = \frac{\beta(\hat{\rho} - 1)}{\ell} \hat{n} + \frac{\beta}{\ell} \sum_i \alpha_i \hat{c}_i; \\ \frac{1}{\lambda_i} \frac{d\hat{c}_i}{dt} = \hat{n} - \hat{c}_i. \end{cases}$$

Окончательная форма нормированных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d\hat{n}}{dt} = \frac{\beta(\hat{\rho} - 1)}{\ell} \hat{n} + \frac{\beta}{\ell} \sum_i \alpha_i \hat{c}_i; \\ \frac{d\hat{c}_i}{dt} = \lambda_i (\hat{n} - \hat{c}_i). \end{cases}$$

1.6. Уравнение обратных часов

Базовая система уравнений кинетики имеет вид

$$\begin{cases} \frac{dn}{dt} = \frac{\rho - \beta}{\ell} n + \sum_i \lambda_i c_i + q; \\ \frac{dc_i}{dt} = \frac{\beta_i}{\ell} n - \lambda_i c_i. \end{cases} \quad (1.14)$$

Решение уравнений кинетики при постоянной реактивности в отсутствие источника является линейной комбинацией $i + 1$ экспоненциальных функций $\exp(\omega_i t)$. Константы ω_i связаны с реактивностью характеристическим уравнением, которое называется уравнением обратных часов. Название возникло на заре реакторной техники, когда один «обратный час» применялся в качестве единицы положительной реактивности. Один обратный час определялся как количество положительной реактивности, которое соответствует асимптотическому экспоненциальному нарастанию мощности с периодом разгона, равным одному часу (или с обратным периодом, равным одному обратному часу):

$$\omega_i = \frac{1}{T_i}.$$

Решение уравнений кинетики будем искать для случая, когда реактивность скачком изменяется от нулевого значения и далее остается постоянной в течение всего переходного процесса (реактор «холодный»). При таких условиях система уравнений кинетики реактора представляет собой систему линейных дифференциальных уравнений, частные решения которых могут быть представлены в виде

$$n(t) = n_0 \exp\left(\frac{t}{T_c}\right);$$

$$c_i(t) = c_{i0} \exp\left(\frac{t}{T_c}\right), \quad i = 1, \dots, 6,$$

где T_c — параметр, имеющий размерность времени.

Если найти для заданной реактивности значения параметра T_e , при которых частные решения для n и для c_i удовлетворяют соответствующим уравнениям системы (1.14), то общее решение уравнений кинетики можно представить в виде суммы семи экспонент:

$$n(t) = \sum_{i=0}^6 A_i \exp\left(\frac{t}{T_{ei}}\right),$$

где A_i — i -я постоянная интегрирования, определяемая из начальных условий.

Для установления зависимости между значениями параметра T_c и реактивностью продифференцируем частные решения:

$$\begin{aligned} \frac{dn}{dt} &= \frac{n_0}{T_c} \exp\left(\frac{t}{T_c}\right) = \frac{n}{T_c}; \\ \frac{dc_i}{dt} &= \frac{c_{i0}}{T_c} \exp\left(\frac{t}{T_c}\right) = \frac{c_i}{T_c} \end{aligned} \quad (1.15)$$

и подставим значение dc_i/dt из (1.15) в левую часть второго уравнения системы (1.14):

$$\frac{c_i}{T_c} = \frac{\beta_i}{\ell} n - \lambda_i c_i,$$

откуда

$$c_i = \frac{\beta_i n}{\ell\left(\frac{1}{T_c} + \lambda_i\right)} = \frac{\beta_i n T_c}{\ell(1 + \lambda_i T_c)},$$

Подставим значение c_i и $\frac{dn}{dt}$ в первое уравнение системы (1.14), описывающей кинетику:

$$\frac{n}{T_c} = \frac{\rho - \beta}{\ell} n + \sum_i \lambda_i \frac{\beta_i n T_c}{\ell(1 + \lambda_i T_c)},$$

домножим обе части уравнения на ℓ/n и получим

$$\frac{\ell}{T_c} = \rho - \beta + \sum_i \frac{\lambda_i \beta_i T_c}{1 + \lambda_i T_c},$$

откуда

$$\rho = \beta + \frac{\ell}{T_c} - \sum_i \frac{\lambda_i \beta_i T_c}{1 + \lambda_i T_c},$$

или несколько другая форма

$$\rho = \sum_i \beta_i + \frac{\ell}{T_c} - \sum_i \frac{\lambda_i \beta_i T_c}{1 + \lambda_i T_c} = \frac{\ell}{T_c} + \sum_i \frac{\beta_i + \lambda_i \beta_i T_c - \lambda_i \beta_i T_c}{1 + \lambda_i T_c},$$

$$\rho = \frac{\ell}{T_c} + \sum_i \frac{\beta_i}{1 + \lambda_i T_c}.$$

Это и есть искомое характеристическое уравнение, устанавливающее взаимосвязь между возмущением ρ и параметром T_c , определяющим интенсивность переходного процесса. В теории реакторов его называют уравнением обратных часов.

Уравнение обратных часов является алгебраическим уравнением седьмой степени относительно параметра T_c . В этом легко убедиться, записав сумму в виде шести слагаемых и приведя все слагаемые правой части к общему знаменателю. Уравнение обратных часов имеет семь корней ($T_{c0}, T_{c1}, \dots, T_{c6}$), значения которых используются в общем решении.

Удобнее записывать эти уравнения через параметр обратного периода $\omega = \frac{1}{T_c}$. Пока у нас «холодный» реактор ρ и ρ_0 — тождественны. Обычно ρ_0 обозначают начальное возмущение:

$$\begin{aligned} \rho_0 &= \beta + \frac{\ell}{T_c} - \sum_i \frac{\beta_i \lambda_i T_c}{1 + \lambda_i T_c} = \beta + \ell\omega - \sum_i \frac{\beta_i \lambda_i}{\omega \left(1 + \frac{\lambda_i}{\omega}\right)} = \\ &= \beta + \ell\omega - \sum_i \frac{\beta_i \lambda_i}{\omega + \lambda_i}; \\ \rho_0 &= \beta + \ell\omega - \sum_i \frac{\beta_i \lambda_i}{\omega + \lambda_i}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Или, поскольку $\beta = \sum_i \beta_i$,

$$\rho_0 = \ell\omega + \sum_i \frac{\beta_i \omega}{\omega + \lambda_i}. \quad (1.17)$$

Уравнения (1.16) и (1.17), как мы уже говорили, представляют собой две формы записи уравнения обратных часов, которое является алгебраическим уравнением $(i+1)$ -й степени относительно ω . Оно имеет i отрицательных действительных корней и один действительный корень того же знака, что и ρ_0 .

Так как при положительном скачке реактивности все (кроме первого) слагаемые общего решения

$$n(t) = \sum_{i=0}^6 A_i \exp\left(\frac{t}{T_{ei}}\right) = \sum_{i=0}^6 A_i \exp(\omega_i t)$$

содержат в своем составе экспоненты с отрицательными показателями степени, то величина этих слагаемых с течением времени уменьшается, стремясь к нулю. В результате по истечении некоторого промежутка времени (порядка $1/\lambda_1$) переходный процесс будет характеризоваться лишь первым слагаемым общего решения:

$$n(t) = A_0 \exp\left(\frac{t}{T_{e0}}\right).$$

Сопоставив его с решением элементарного уравнения кинетики реактора

$$n = n_0 \exp\left(\frac{t}{T_c}\right),$$

можно заключить, что параметр T_{e0} имеет смысл периода реактора. А поскольку T_{e0} определяет темп изменения относительной плотности нейтронов после установления чисто экспоненциальной зависимости $n = f(\rho, t)$, этот параметр называют обычно установившимся периодом реактора. В отличие от T_{e0} все остальные параметры ($T_{e1}, T_{e2}, \dots, T_{e6}$) называются переходными периодами реактора.

Графическая иллюстрация общего решения как суммы экспонент имеет вид, представленный на рис. 4.

Построим графическое отображение уравнения обратных часов. Проведем оси ω и ρ_0 и вернемся к самим уравнениям:

$$\begin{aligned} \rho_0 &= \beta + \ell\omega - \sum_i \frac{\beta_i \lambda_i}{\omega + \lambda_i}; \\ \rho_0 &= \ell\omega + \sum_i \frac{\beta_i \omega}{\omega + \lambda_i}. \end{aligned}$$

При очень больших ω , как положительных, так и отрицательных, первое уравнение принимает асимптотический вид

$$\rho_0 = \beta + \ell\omega,$$

откуда

$$\omega = \frac{\rho_0 - \beta}{\ell}.$$

Построим эту асимптоту. Точки пересечения ее с осями ω и ρ имеют координаты: $(0; -\beta/\ell)$; $(\beta; 0)$.

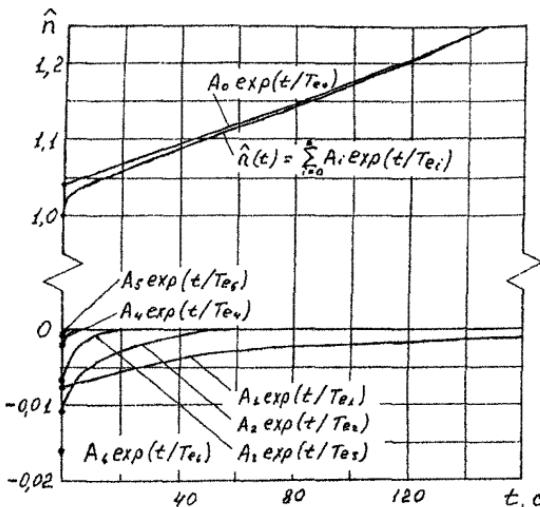


Рис. 4. Графическая иллюстрация общего решения уравнений кинетики как суммы экспонент

Для малых ω ($|\omega| \ll \lambda_{i \min}$) второе уравнение записывается следующим образом:

$$\rho_0 \cong \left(\ell + \sum_i \frac{\beta_i}{\lambda_i} \right) \omega. \quad (1.18)$$

Построим и эту прямую:

$$\omega := \frac{\rho_0}{\ell + \sum_i \frac{\beta_i}{\lambda_i}}.$$

В этом уравнении ω имеет тот же знак, что и ρ_0 . Это означает, что из него находится корень ω_0 , соответствующий асимптотическому периоду. Далее из уравнений обратных часов видно, что $\rho \rightarrow \pm\infty$ при $\omega \rightarrow -\lambda_i$. Это значит, что имеется i асимптот $\omega = -\lambda_i$, и можно показать, что $(i-1)$ ветвей решения уравнения обратных часов ограничены соответствующими асимптотами $-\lambda_i$ и $-\lambda_{i+1}$.

Все сказанное отражено на рис. 5, где качественно представлено решение уравнения обратных часов (ω в зависимости от ρ_0), видны семь ветвей решения при шести группах запаздывающих нейтронов.

Если бы не было запаздывающих нейтронов, уравнение обратных часов записывалось бы просто, как $\rho_0 = \ell\omega$, а плотность нейтронов изменялась бы по закону $n = n(0) \exp(\omega t)$. Но $\omega = \frac{\rho_0}{\ell}$, и тогда $n = n(0) \exp\left(-\frac{\rho_0}{\ell} t\right)$.

Для малых реактивностей справедливо уравнение (1.18), которое можно записать в форме $\rho_0 = \bar{\ell}\omega$, где $\bar{\ell}$ — время жизни с учетом запаздывающих нейтронов, обычно называемое эффективным временем жизни:

$$\bar{\ell} = \ell + \sum \frac{\beta_i}{\lambda_i}, \quad \text{или} \quad \bar{\ell} = \ell + \sum \beta_i t_i. \quad (1.19)$$

Тогда определяющий член решения будет приближенно равен $A_0 \exp\left(-\frac{\rho_0}{\bar{\ell}} t\right)$.

Ясно, что запаздывающие нейтроны оказывают замедляющее воздействие на цепную реакцию, поскольку $\bar{\ell} > \ell$. Насколько оно велико, становится ясным из сравнения величин ℓ и $\sum_i \left(\frac{\beta_i}{\lambda_i}\right)$.

Время жизни нейтронов ℓ изменяется в пределах от $\sim 10^{-8}$ с (быстрая металлическая сборка без отражателя) до $\sim 10^{-3}$ с (большой тепловой реактор), в то время как величина $\sum_i \left(\frac{\beta_i}{\lambda_i}\right) = \frac{\beta}{\lambda}$ для ^{235}U равна 0,0834 с.

Пренебрегая в (1.18) и (1.19) величиной ℓ , получаем для малых реактивностей простейшую формулу для эффективного времени жизни нейтронов $\bar{\ell}$ и простейший вид уравнения обратных

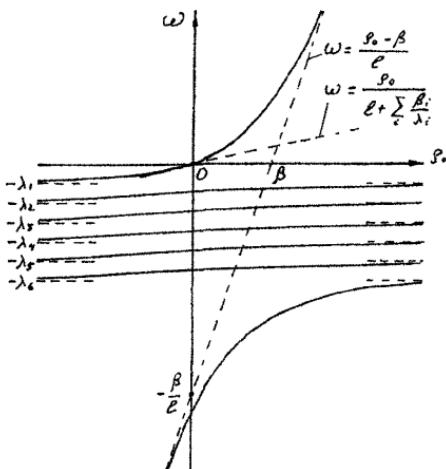


Рис. 5. Графическая интерпретация уравнения обратных часов для шести групп запаздывающих нейтронов

часов:

$$\ell = \sum_i \left(\frac{\beta_i}{\lambda_i} \right) = \frac{\beta}{\lambda};$$

$$\rho_0 \approx \bar{\ell} \omega \approx \sum_i \left(\frac{\beta_i}{\lambda_i} \right) \omega = \frac{\beta \omega}{\lambda}.$$

Таким образом, асимптотическое поведение реактора при малой реактивности определяется запаздывающими нейтронами. Вернемся к рис. 5. Здесь из-за малости ℓ при графическом представлении решения уравнения обратных часов допущены сильные искажения. В действительности асимптота $\omega = \frac{\rho_0 - \beta}{\ell}$ должна, конечно, быть почти вертикальной. Пока ρ_0 увеличивается, оставаясь малой, положительный корень решения увеличивается медленно в соответствии с уравнением (1.18), но как только ρ_0 становится больше β , замедляющее действие запаздывающих нейтронов на цепную реакцию исчезает, и положительная ветвь решения резко поднимается вверх. Равенство $\rho_0 = \beta$ называется условием мгновенной критичности, так как при $\rho_0 = \beta$ цепная реакция становится самоподдерживающейся на одних только мгновенных нейтронах.

Малость ℓ позволяет успешно пользоваться приближенным видом уравнения обратных часов, которое получается из уравнений (1.16) и (1.17) при $\ell \rightarrow 0$:

$$\rho_0 \approx \beta - \sum_i \frac{\beta_i \lambda_i}{\omega + \lambda_i} = \sum_i \frac{\beta_i \omega}{\omega + \lambda_i}.$$

Это уравнение гораздо лучше, чем предыдущее уравнение, описывает большую часть области $\rho_0 < \beta$, хотя, конечно, оно неприменимо при $\rho_0 \rightarrow \beta$. Это уравнение представляет собой уравнение обратных часов в так называемом приближении мгновенного скачка, которое широко используется в ядерной технике. Это приближение будет предметом дальнейшего рассмотрения. Уравнение дает также хорошие приближения и для всех отрицательных корней, кроме отрицательного корня, наибольшего по абсолютному значению, который теряется при использовании условия $\ell = 0$.

Конечно, знание переходных периодов важно, особенно при анализе начальной части переходного процесса, однако информация об асимптотическом периоде, несомненно, более значима.

На рис. 6 графически представлены в полулогарифмическом масштабе зависимости положительных корней уравнения обратных часов (установившегося периода) от реактивности, соответствующие делению ^{235}U тепловыми нейтронами. По оси ординат в логарифмическом масштабе отложен установившийся период, обратный ω_0 . Заметим, что установившийся период при достижении мгновенной критичности (реактивность $\rho = \beta$) уменьшается от значения, равного примерно одной секунде в случае теплового реактора, до нескольких миллисекунд в случае быстрого реактора.

Представленная зависимость ярко показывает, что при возмущениях, превышающих долю запаздывающих нейтронов, скорость процессов определяется временем жизни мгновенных нейтронов, что хорошо видно из расслоения зависимости при значениях $\rho_0 > \beta$. В то же время, при возмущениях, заметно меньших β , скорость процессов определяется запаздывающими нейтронами и реально не зависит от времени жизни мгновенных нейтронов (все зависимости с разными временами жизни сходятся в одну).

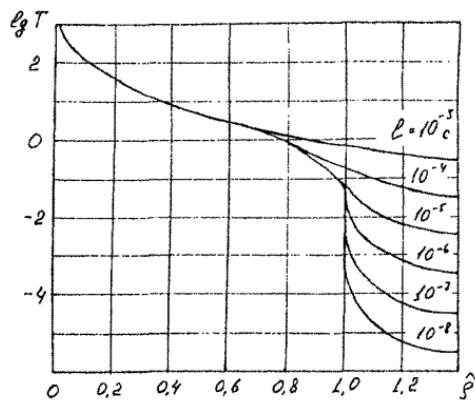


Рис. 6. Зависимость установившегося периода реактора от реактивности при положительном возмущении

1.7. Одногрупповые представления

Часто вполне допустимо пользоваться упрощенными динамическими уравнениями, которые получаются, если предположить, что все запаздывающие нейтроны можно объединить в одну группу с единственным временем жизни. Исследуем уравнение обратных часов при одногрупповом представлении запаздывающих нейтронов и обсудим пределы применимости такого представления.

Обычный прием, применяемый при построении модели, состоит в том, что соотношение между асимптотическим периодом

реактора и реактивностью при малых ω сохраняется таким же, как при шести группах запаздывающих нейтронов. Для одной группы запаздывающих нейтронов ($\sum_i \beta_i \rightarrow \beta$) уравнение (1.18), справедливое для малых ω , может быть записано в виде

$$\rho_0 \approx \left(\ell + \sum_i \frac{\beta_i}{\lambda_i} \right) \omega \approx \left(\ell + \frac{\beta}{\lambda} \right) \omega.$$

Из сравнения уравнений видим, что $\sum_i \frac{\beta_i}{\lambda_i} = \frac{\beta}{\lambda}$ и в этом случае λ должно удовлетворять условию:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\beta} \sum_i \frac{\beta_i}{\lambda_i}.$$

При делении ^{235}U тепловыми нейтронами $\lambda = 0,0767 \text{ с}^{-1}$.

На основании общего уравнения обратных часов запишем две формы уравнения обратных часов для одной эффективной группы запаздывающих нейтронов:

$$\rho_0 = \ell\omega + \frac{\beta\omega}{\omega + \lambda}, \quad \rho_0 = \beta + \ell\omega - \frac{\beta\lambda}{\omega + \lambda}.$$

Его можно рассматривать как квадратное уравнение относительно ω :

$$\rho_0\omega - \rho_0\lambda = \ell\omega^2 + \ell\lambda\omega + \beta\omega,$$

откуда

$$\ell\omega^2 + (\beta - \rho_0 + \lambda\ell)\omega - \lambda\rho_0 = 0.$$

Легко показать, что действительных корней у этого уравнения два — один корень всегда отрицательный, а другой имеет тот же знак, что и ρ_0 . Графическая зависимость между ω и ρ_0 представлена на рис. 7. Построение проводится аналогично графической зависимости для шести групп запаздывающих нейтронов.

Сравнение с рисунком для шести групп запаздывающих нейтронов показывает, что кривые для одной эффективной группы и для шести групп запаздывающих нейтронов совпадают при очень малых и очень больших ω . В то же время, погрешность в промежуточной области может быть довольно большой.

Прием, подобный использованному, применяется для того, чтобы достичнуть совпадения этих же кривых вблизи точки, соответствующей условию критичности реактора на одних только мгновенных нейтронах. Когда $|\omega| \gg \lambda_{i \max}$ уравнение обратных часов (1.16) принимает вид

$$\rho_0 \approx \beta + \ell\omega - \frac{\sum_i \beta_i \lambda_i}{\omega}.$$

Из этого уравнения при одной эффективной группе запаздывающих нейронов находим, что

$$\rho_0 \approx \beta + \ell\omega - \frac{\beta\lambda'}{\omega}.$$

Из сравнения этих уравнений следует, что

$$\frac{\beta\lambda'}{\omega} = \frac{\sum_i \beta_i \lambda_i}{\omega} \quad \text{и} \quad \lambda' = \frac{1}{\beta} \sum_i \beta_i \lambda_i.$$

При делении ^{235}U тепловыми нейтронами $\lambda' = 0,405 \text{ c}^{-1}$.

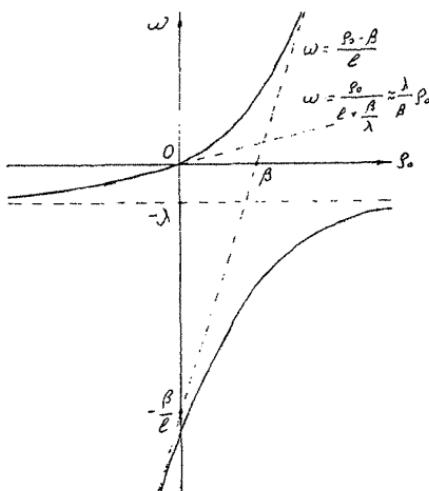


Рис. 7. Графическая интерпретация уравнения обратных часов для одной эффективной группы запаздывающих нейтронов

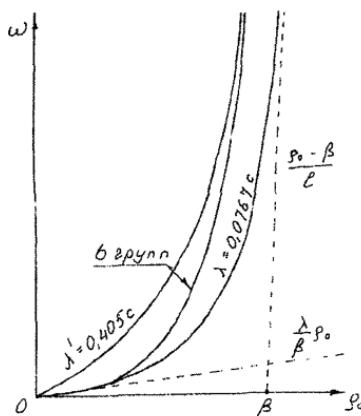


Рис. 8. Изменение обратного периода в зависимости от положительного возмущения по реактивности для различных одногрупповых и шестигрупповых моделей

Количественное сравнение зависимостей ω от ρ_0 при шестигрупповом и одногрупповом представлениях запаздывающих нейтронов показано на рис. 8. В широкой области изменений ω ближе к кривой, соответствующей шести группам запаздывающих нейтронов, располагается кривая для одной группы запаздывающих нейтронов с $\lambda' = 0,405 \text{ с}^{-1}$. Однако она дает всегда заниженные значения реактивности, а при малых ω ею просто нельзя пользоваться. Однако при малых значениях реактивности наблюдается значительно лучшее соответствие между шестигрупповой моделью и одногрупповым приближением с $\lambda = 0,0767 \text{ с}^{-1}$.

Но при малых и промежуточных положительных значениях реактивности возникает затруднение другого характера. Функция $n(t)$

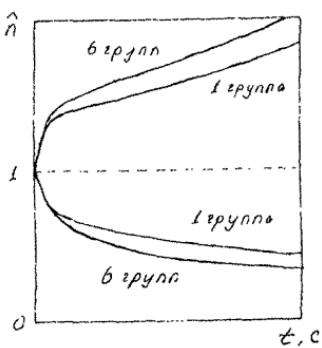


Рис. 9. Изменение плотности нейтронов для шести- и одногруппового приближений при положительном и отрицательном возмущении

зованиями одно- и шестигрупповых моделей при положительном и отрицательном возмущениях по реактивности.

При больших отрицательных реактивностях обе одногрупповые модели малопригодны. В этом случае все слагаемые функции $n(t)$ экспоненциально убывают и слагаемое, содержащее наименьшее ω_i , становится в конце концов определяющим. Сравнение соответствующих графических зависимостей показывает, что по одногрупповой модели асимптотический спад мощности происходит слишком быстро. В некоторых случаях можно достигнуть лучших результатов, используя λ_1 вместо λ , но тогда оказываются существенными погрешности при малых реактивностях.

в одногрупповом приближении состоит из двух слагаемых, одно из которых экспоненциально возрастает, а другое очень быстро экспоненциально убывает. Отсутствие промежуточных ветвей решения уравнения обратных часов (слагаемые, убывающие гораздо медленнее) означает, что одногрупповая модель занижает интервал времени между моментом, когда произошло скачкообразное изменение реактивности, и моментом, когда практически установился асимптотический период разгона реактора. На рис. 9 представлено сравнение результатов с использованием одно- и шестигрупповых моделей при положительном и отрицательном возмущениях по реактивности.

Чтобы улучшить положение для отрицательной реактивности без значительных математических осложнений, можно использовать такую двухгрупповую модель, в которой константы одной группы совпадают с константами первой (самой долгоживущей) группы из шести групп запаздывающих нейтронов, а константы другой находятся путем соответствующего усреднения свойств пяти оставшихся групп. В этом случае уравнение обратных часов будет уравнением третьей степени относительно ω .

Были изучены и другие малогрупповые представления. Двух- и трехгрупповые модели широко использовались в практике расчетов при ограниченной емкости вычислительной машины или недостатке времени. Они позволяют получить приемлемую точность результатов расчета в широком диапазоне изменений ω и ρ_0 при не слишком большом числе уравнений, но это уже история. Удобство одногрупповых приближений — их простота и возможность получения аналитических решений, а возможности современных ЭВМ позволяют без проблем решать системы уравнений высокого порядка.

2. Постоянная реактивность и ступенчатые изменения реактивности

В этом разделе мы будем исследовать решения уравнений динамики, соответствующих точечной модели реактора, в случае постоянной реактивности. Сюда относится поведение реактора при так называемых ступенчатых вводах реактивности и при ступенчатых изменениях мощности источников нейтронов.

Использование ступенчатых функций для приближенного представления с их помощью действительного поведения во времени реактивности или мощности нейтронных источников очень удобно в динамике реакторов. Например, действительное поведение реактора во времени при изменении положения стержня регулирования с некоторой конечной скоростью часто может быть приближенно представлено его поведением при ступенчатом изменении реактивности в определенный момент времени. Это справедливо, если скорость протекающих в реакторе процессов будет заметно меньше, чем скорость перемещения стержня регулирования, что достаточно часто выполняется в штатных ситуациях управления реактором.

Существенной причиной, побуждающей к исследованию решений уравнений динамики при постоянной реактивности, является их простота. Они представляют собой линейные комбинации экспоненциальных функций, свойства которых легко понять. Эти решения служат полезной основой для изучения более сложных проблем. Конечно, такие решения становятся недостаточными и неадекватными, если мощность и температура реактора настолько высоки, что появляется обратная связь по реактивности (изменения реактивности, вызванные изменениями плотности материалов и изменениями спектра нейтронов). Эти вопросы будут разбираться впоследствии в курсе «Динамика, управление и безопасность».

2.1. Равновесие и критичность

Запишем снова уравнения динамики, соответствующие точечной модели реактора:

$$\frac{dn}{dt} = \frac{\rho - \beta}{\ell} n + \sum_i \lambda_i c_i + q; \quad (2.1)$$

$$\frac{dc_i}{dt} = \frac{\beta_i}{\ell} n - \lambda_i c_i, \quad (2.2)$$

где, как и прежде, n — плотность нейтронов (или мощность реактора и т. д.); c_i — плотность ядер-предшественников (та же размерность, что и у n); t — время; $\rho = \frac{k_{\text{эфф}} - 1}{k_{\text{эфф}}}$ — реактивность ($k_{\text{эфф}}$ — эффективный коэффициент размножения нейтронов); β — полная доля запаздывающих нейтронов, $\beta = \sum_i \beta_i$; ℓ — время жизни нейтронов; λ_i — постоянная распада ядер-предшественников; q — эффективная мощность источника (та же размерность, что и у dn/dt).

Суммирование в уравнении проводится от $i = 1$ до $i = m$ (m — число групп запаздывающих нейтронов). Параметры β_i , λ_i и ℓ предполагаются постоянными.

Таким образом, точечная модель реактора описывается системой из $m + 1$ дифференциальных уравнений первого порядка с заданными функциями $\rho(t)$ и $q(t)$. В общем случае реактивность ρ зависит от плотности нейтронов n , и система нелинейна; в отсутствие обратной связи по реактивности $\rho(t)$ — заранее известная функция времени, и тогда система линейна.

Рассмотрим сначала равновесное (стационарное) состояние системы, когда равны нулю производные по времени от n и всех c_i . Проводя суммирование всех уравнений (2.1) и (2.2), находим, что

$$\frac{d}{dt} \left(n + \sum_i c_i \right) = \frac{\rho}{\ell} n + q. \quad (2.3)$$

Равновесное состояние имеет место, если $d/dt = 0$ и, следовательно,

$$\rho = -\frac{\ell q}{n}.$$

При переменной во времени мощности источника плотность нейтронов могла бы оставаться неизменной ($n = n_0$), если бы функции $\rho(t)$ и $q(t)$ были строго пропорциональны друг другу. Однако для достижения истинного равновесного состояния необходимо, чтобы q и ρ были константами q_0 и ρ_0 . В этом случае

$$\rho_0 = -\frac{\ell q_0}{n_0} \quad (2.4)$$

и о реакторе говорят, что он находится в подкритическом равновесном состоянии ($\rho_0 < 0$, $k_{\text{ср}} < 1$).

Уровень мощности стационарного реактора

$$n_0 = -\frac{\ell q_0}{\rho_0} = \frac{\ell q_0}{|\rho_0|}.$$

По уравнению для c_i находим равновесную плотность ядерпредшественников:

$$c_{i0} = \frac{\beta_i n_0}{\lambda_i \ell}.$$

Критичность, определяемая условием $k = 1$ ($\rho = 0$), не является, строго говоря, равновесным состоянием. Как видно из уравнения (2.3), мощность критического реактора при наличии источника нейтронов непрерывно увеличивается. Нейтронный источник, вводимый перед запуском реактора для обеспечения надежной работы приборов, контролирующих мощность, может быть удален из активной зоны, как только будет достигнуто критическое состояние. Тем не менее в качестве источников нейтронов всегда присутствуют нейтроны спонтанного деления и нейтроны от космических лучей. Вследствие этого реактор, работающий на постоянной мощности, всегда слегка подкритичен, хотя его реактивность, определяемая уравнением (2.4), обычно пренебрежимо мала. В этом случае источником нейтронов в расчетах можно пренебречь.

2.2. Подкритический реактор

Одна из важнейших операций системы управления и защиты (СУЗ) реактора — это пуск реактора. Она выполняется в основном путем операций с реактором, находящимся в подкритическом состоянии, т. е. при $\rho < 0$, или $k_{\text{ср}} < 1$.

Пуск реактора из глубоко подкритического состояния проводится посредством постепенного извлечения органов автоматического регулирования и компенсации реактивности вплоть до достижения критичности при безусловном выполнении правил ядерной безопасности в отношении скорости процесса. Задача данного подраздела — анализ характера переходного процесса при изменении степени подкритичности $\delta k_{\text{зф}} = k_{\text{зф}} - 1$, уменьшающейся по абсолютной величине вслед за извлечением органов компенсации. При этом наибольший интерес представляют:

- характер изменения плотности нейтронов в подкритическом реакторе при изменении степени подкритичности (при введении положительной реактивности);
- параметры, характеризующие переходные процессы в подкритическом реакторе и, в частности, при выводе его в критическое состояние;
- связь этих параметров со степенью подкритичности.

Для ответа на поставленные вопросы воспользуемся элементарным уравнением кинетики реактора, которое в данном случае будет иметь вид

$$\frac{dn}{dt} = - \frac{|\delta k_{\text{зф}}|}{\ell} n + q,$$

где q — удельная мощность источника нейтронов, нейтр/($\text{см}^3 \cdot \text{с}$).

Это то же самое уравнение, что мы получали и использовали ранее, но в нем мы поставили модуль и знак минус, чтобы подчеркнуть подкритичность.

Ранее при рассмотрении работы критического реактора мы игнорировали наличие источника нейтронов, так как его удельная мощность обычно пренебрежимо мала по сравнению с плотностью нейтронов в активной зоне при регулировании мощности реактора. Сейчас же мы вынуждены учесть источник нейтронов, поскольку в гипотетическом случае его отсутствия ($q = 0$) плотность нейтронов в подкритическом реакторе достигла бы нулевого значения. В действительности этого не может быть из-за спонтанного (самопроизвольного) распада ядер урана и наличия в активной зоне фотонейтронных источников, таких как бериллий и дейтерий, на ядрах которых идет реакция типа (γ, n) при относительно низкой энергии γ -квантов.

Решение будем искать после преобразования уравнения к виду

$$\frac{dn}{dt} = \frac{n_0^{\text{ист}} - n|\delta k_{\text{эф}}|}{\ell},$$

где $n_0^{\text{ист}} = q\ell$ — плотность нейтронов, которая создавалась бы источником в активной зоне, если бы процесс деления ядер отсутствовал. Предполагается, что среднее время жизни нейтронов источника равно среднему времени жизни мгновенных нейтронов.

Интересующую нас зависимость $n = f(\delta k_{\text{эф}}, t)$ получим в результате интегрирования:

$$\begin{aligned} \frac{\ell}{n_0^{\text{ист}} - n|\delta k_{\text{эф}}|} dn &= dt; \\ \ell \int_{n_0^{\text{ист}}}^n \frac{dn}{n_0^{\text{ист}} - n|\delta k_{\text{эф}}|} &= t. \end{aligned}$$

Воспользуемся табличным интегралом

$$\int \frac{dx}{a + bx} = \frac{1}{b} \ln |a + bx|,$$

тогда

$$\begin{aligned} \frac{t}{\ell} &= -\frac{1}{|\delta k_{\text{эф}}|} \ln |n_0^{\text{ист}} - n|\delta k_{\text{эф}}|| \Big|_{n_0^{\text{ист}}}; \\ -\frac{t}{\ell} |\delta k_{\text{эф}}| &= \ln |n_0^{\text{ист}} - n|\delta k_{\text{эф}}|| - \ln |n_0^{\text{ист}} - n_0^{\text{ист}}|\delta k_{\text{эф}}||; \\ \exp\left(-\frac{|\delta k_{\text{эф}}|}{\ell} t\right) &= \frac{n_0^{\text{ист}} - n|\delta k_{\text{эф}}|}{n_0^{\text{ист}}(1 - |\delta k_{\text{эф}}|)}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} n|\delta k_{\text{эф}}| &= n_0^{\text{ист}} - n_0^{\text{ист}}(1 - |\delta k_{\text{эф}}|) \exp\left(-\frac{|\delta k_{\text{эф}}|}{\ell} t\right); \\ n &= \frac{n_0^{\text{ист}}}{|\delta k_{\text{эф}}|} - \frac{n_0^{\text{ист}}}{|\delta k_{\text{эф}}|} (1 - |\delta k_{\text{эф}}|) \exp\left(-\frac{|\delta k_{\text{эф}}|}{\ell} t\right); \\ n &= \frac{n_0^{\text{ист}}}{|\delta k_{\text{эф}}|} \left[1 - (1 - |\delta k_{\text{эф}}|) \exp\left(-\frac{|\delta k_{\text{эф}}|}{\ell} t\right) \right]. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Из полученного выражения следует, что после внесения в подкритическую активную зону источника нейтронов плотность нейтронов увеличивается по экспоненциальному закону, стремясь при $t = \infty$ к пределу

$$n_l = \frac{n_0^{\text{ист}}}{|\delta k_{\text{эф}}|}.$$

Такой характер переходного процесса легко объяснить. Действительно, к начальной плотности $n_0^{\text{ист}}$, созданной источником в момент его внесения в активную зону, в каждом цикле размножения будет добавляться $n_0^{\text{ист}}k_{\phi}$; $n_0^{\text{ист}}k_{\phi}^2$; $n_0^{\text{ист}}k_{\phi}^3$ и т. д. В результате, когда число циклов размножения t стремится к бесконечности, плотность нейтронов в подкритическом реакторе, где $k_{\phi} < 1$, асимптотически приближается к пределу, представляющему собой сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$n_t = n_0^{\text{ист}} + n_0^{\text{ист}}k_{\phi} + n_0^{\text{ист}}k_{\phi}^2 + n_0^{\text{ист}}k_{\phi}^3 + \dots + n_0^{\text{ист}}k_{\phi}^{t-1} = \\ = n_0^{\text{ист}} \frac{1}{1 - k_{\phi}} = \frac{n_0^{\text{ист}}}{|\delta k_{\phi}|}.$$

Обычно это выражение записывают в виде

$$\frac{n}{n_0^{\text{ист}}} = \frac{1}{|\delta k_{\phi}|}$$

и называют подкритическим коэффициентом умножения нейтронов, так как приведенное отношение показывает, во сколько раз установившаяся в подкритической активной зоне с источником плотность нейтронов превышает начальную плотность нейтронов, созданную источником в момент его внесения в данную активную зону. Например, при $k_{\phi} = 0,9$, т. е. при $\delta k_{\phi} = -0,1$, $n/n_0^{\text{ист}} = 10$, а при $k_{\phi} = 0,5$ $n/n_0^{\text{ист}} = 2$. Изобразим изменение относительной плотности нейтронов после внесения источника в подкритический реактор с различными степенями подкритичности (рис. 10).

Показанное на рис. 10 линейное увеличение плотности нейтронов в критическом реакторе не противоречит закону постоянства n при $k_{\phi}=1$. Названный закон отображает внутренние свойства реактора без источника нейтронов, а на рисунке показано увеличение $n/n_0^{\text{ист}}$ за счет нейтронов источника. Стоит извлечь источник

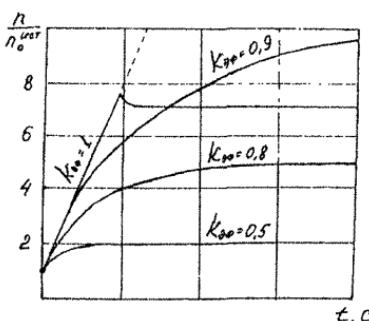


Рис. 10. Изменение относительной плотности нейтронов после внесения источника в подкритический реактор

($q = 0$), как увеличение плотности нейтронов прекратится:

$$\frac{dn}{dt} = \frac{n\delta k_{\text{эф}}}{\ell} + q.$$

К этим же выводам можно прийти, проанализировав элементарное уравнение кинетики реактора (с учетом источника), которое при $k_{\text{эф}} = 1$ ($\delta k_{\text{эф}} = 0$) имеет вид $dn/dt = q$ и решение $n = n_0 + qt$.

Так как при пуске реактора критическое состояние часто достигается ступенчатым выдвижением органов компенсации реактивности, практический интерес представляют соотношения плотностей нейтронов при последовательном уменьшении степени подкритичности n_{i+1}/n_i и получаемые при этом значения времени $t_{\text{уст } i}$, необходимые для достижения установившейся плотности нейтронов после каждого изменения степени подкритичности.

Если представить степень подкритичности $\delta k_{\text{эф}}$ как сумму начальной подкритичности $\delta k_{\text{эф} 0}$ и вводимого скачкообразно возмущения $\delta k_{\text{эф} \text{в}}$, то можно записать

$$\delta k_{\text{эф}} = \delta k_{\text{эф} 0} + \delta k_{\text{эф} \text{в}}.$$

Ввиду того, что $\delta k_{\text{эф}}$ и $\delta k_{\text{эф} 0}$ в подкритическом реакторе отрицательны, а знак $\delta k_{\text{эф} \text{в}}$ может быть любым, это уравнение часто записывают в виде

$$|\delta k_{\text{эф}}| = |\delta k_{\text{эф} 0}| - \delta k_{\text{эф} \text{в}},$$

причем знак минус (–) перед $\delta k_{\text{эф} \text{в}}$ означает введение положительной реактивности, а знак плюс (+) – наоборот, отрицательной (для подкритического реактора). Тогда, если начальная плотность нейтронов n_1 , то

$$n_1 = \frac{n_0^{\text{ист}}}{|\delta k_{\text{эф} 1}|}; \quad n_2 = \frac{n_0^{\text{ист}}}{|\delta k_{\text{эф} 2}|} = \frac{n_0^{\text{ист}}}{|\delta k_{\text{эф} 1}| - \delta k_{\text{эф} \text{в}}}$$

и их отношение

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{|\delta k_{\text{эф} 1}|}{|\delta k_{\text{эф} 1}| - \delta k_{\text{эф} \text{в}}}.$$

Часто в силу того, что $\rho \cong \delta k_{\text{эф}}$, записывают

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{|\rho_1|}{|\rho_1| - \rho_{\text{в}}}.$$

Полученные результаты иллюстрируют тот факт, что в случае приближения к критическому состоянию приращение плотности

нейтронов получается тем большим, чем меньше по абсолютной величине оставшаяся подкритичность.

Полученное решение (2.5) показывает в общем случае асимптотическое увеличение плотности нейтронов, и теоретически время достижения установившегося значения равно бесконечности. Реально для определения времени достижения установившейся плотности нейтронов после изменения степени подкритичности принимают момент времени, когда плотность нейтронов достигает некого договоренного значения. Обычно это 95 % установившегося значения [4]. Так как установившаяся плотность нейтронов в подкритическом реакторе определяется отношением $n_0^{\text{уст}} / |\delta k_{\text{эфф}}|$, то принятое условие стабилизации процесса можно записать в виде

$$\frac{\frac{n_0^{\text{уст}}}{|\delta k_{\text{эфф}}|} - \frac{n_0^{\text{уст}}}{|\delta k_{\text{эфф}}|} (1 - |\delta k_{\text{эфф}}|) \exp\left(-\frac{|\delta k_{\text{эфф}}|}{\ell} t_{\text{уст}}\right)}{\frac{n_0^{\text{уст}}}{|\delta k_{\text{эфф}}|}} = 0,95.$$

Отсюда

$$\left[1 - |\delta k_{\text{эфф}}|\right] \exp\left(-\frac{|\delta k_{\text{эфф}}|}{\ell} t_{\text{уст}}\right) = 0,05.$$

Если для простоты ограничиться случаем, когда состояние реактора близко к критическому, и пренебречь в квадратных скобках членом $|\delta k_{\text{эфф}}|$ по сравнению с единицей, то после логарифмирования последнего равенства получим:

$$\ln \left[\exp\left(-\frac{|\delta k_{\text{эфф}}|}{\ell} t_{\text{уст}}\right) \right] = \ln 0,05; \quad -\frac{|\delta k_{\text{эфф}}|}{\ell} t_{\text{уст}} \approx -3,$$

откуда

$$t_{\text{уст}} \approx \frac{3\ell}{|\delta k_{\text{эфф}}|}.$$

Поскольку характер реальных переходных процессов во многом определяется наличием запаздывающих нейтронов, можно повысить точность вычисления $t_{\text{уст}}$, заменив в расчетной формуле ℓ на эффективное время жизни $\bar{\ell}$:

$$\bar{\ell} = \ell + \sum_{i=1}^6 \beta_i t_i = \sum_{i=1}^6 \frac{\beta_i}{\lambda_i}; \quad \bar{t}_{\text{уст}} \approx \frac{3\bar{\ell}}{|\delta k_{\text{эфф}}|} \approx \frac{0,25}{|\delta k_{\text{эфф}}|}.$$

Из полученного равенства следует, что чем ближе критическое состояние, тем больше время стабилизации процесса. В критическом реакторе, для которого $|\delta k_{\text{кр}}| = 0$, время достижения установившейся плотности нейтронов бесконечно. Это очевидно, так как при наличии источника плотность нейтронов в критическом реакторе увеличивается по линейному закону, никогда не достигая установившегося значения.

2.3. Анализ кинетики реактора при положительном скачке реактивности

Выше было показано, что при положительном скачке реактивности изменение относительной плотности нейтронов во времени может быть представлено в виде суммы семи экспонент

$$n(t) = \sum_{i=1}^6 A_i \exp(\omega_i t),$$

первая из которых имеет положительный показатель степени $\omega_0 t = -t/T_{c0}$ и положительный коэффициент A_0 , а шесть остальных — отрицательные показатели степени $\omega_i t = t/T_{ei}$ и отрицательные коэффициенты A_i . Для иллюстрации на рис. 4 были представлены результаты переходного процесса, сопровождающего скачкообразное увеличение реактивности. По оси ординат на рисунке были отложены значения относительной плотности нейтронов $\hat{n} = n/n_0$ и значения каждого из семи слагаемых общего решения. Очевидно, что в момент $t = 0$ все экспоненты обращаются в единицы, и выражение преобразуется к виду

$$n(t=0) = \sum_{i=0}^6 A_i.$$

В результате алгебраического суммирования $A_0, A_1, A_2, \dots, A_6$ во всех случаях получается единица (при наличии нормировки). Следовательно, начальное значение относительной плотности нейтронов $\hat{n}(t=0) = 1$. Полученные при расчете зависимости изменения слагаемых общего решения во времени были представлены ранее на рис. 4. Суммирование текущих значений слагаемых общего решения позволяет построить искомую функцию $\hat{n}(t)$. Можно говорить, что это математическая сторона описания переходного процесса при положительном скачке реактивности.

Полученный характер переходного процесса $\hat{n} = f(\rho, t)$ может быть пояснен исходя из физических соображений. В случае скачкообразного высвобождения реактивности в первую очередь увеличивается плотность мгновенных нейтронов $n^{\text{МГН}}$, так как среднее время цикла размножения на мгновенных нейтронах равно примерно 10^{-4} с, а среднее время жизни запаздывающих нейтронов — 13 с. При этом если высвобожденная реактивность $\rho < \beta$, а именно такие возмущения мы рассматриваем в этом разделе, начальный темп увеличения $n^{\text{МГН}}$ постепенно снижается, так как в каждом цикле размножения «недодаются» запаздывающие нейтроны, скорость генерации которых определяется относительно низкой концентрацией ядер-предшественников, образовавшихся до внесения возмущения по реактивности, когда плотность нейтронов была ниже текущей.

Поскольку скорости процессов для мгновенных и запаздывающих нейтронов существенно разнятся, то для рассмотрения переходных процессов целесообразно разбить эффективный коэффициент размножения нейтронов на составляющие $k_{\text{ЭФ}}^{\text{МГН}}$ и $k_{\text{ЭФ}}^{\text{ЗАП}}$ [5]:

$$k_{\text{ЭФ}} = k_{\text{ЭФ}}^{\text{МГН}} + k_{\text{ЭФ}}^{\text{ЗАП}},$$

где $k_{\text{ЭФ}}^{\text{МГН}} = k_{\text{ЭФ}}(1 - \beta)$; $k_{\text{ЭФ}}^{\text{ЗАП}} = k_{\text{ЭФ}}\beta$.

Можно сказать, что в рассматриваемом случае реактор подкритичен на мгновенных нейтронах, так как при $\rho_0 < \beta$

$$k_{\text{ЭФ}}^{\text{МГН}} = k_{\text{ЭФ}}(1 - \beta).$$

Выразим $k_{\text{ЭФ}}$ через ρ :

$$\rho = \frac{k_{\text{ЭФ}} - 1}{k_{\text{ЭФ}}} ; \quad k_{\text{ЭФ}}\rho = k_{\text{ЭФ}} - 1 \quad \text{и} \quad k_{\text{ЭФ}} = \frac{1}{1 - \rho}.$$

Тогда

$$k_{\text{ЭФ}}^{\text{МГН}} = \frac{1 - \beta}{1 - \rho_0} < 1.$$

Следовательно, если бы плотность запаздывающих нейтронов $n_0^{\text{ЗАП}}$ после внесения возмущения все время оставалась постоянной, как это показано штриховой линией на рис. 11, то плотность мгновенных нейтронов стабилизировалась бы на некотором уровне $n_1^{\text{МГН}} > n_0^{\text{МГН}}$. Подобные переходные процессы были рассмотрены при изучении кинетики размножения нейтронов в подкритическом реакторе.

В действительности плотность запаздывающих нейтронов при увеличении $n^{\text{МГН}}$ не может оставаться постоянной, поскольку при этом увеличивается концентрация ядер-предшественников, а значит, с некоторым отставанием и плотность запаздывающих нейтронов.

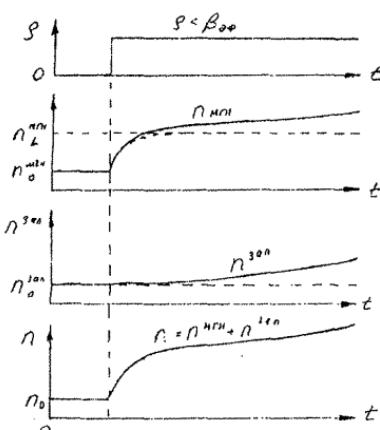


Рис. 11. Изменение составляющих плотности нейтронов при положительном скачке реактивности

Так как увеличение $n^{\text{зап}}$ влечет за собой рост $n^{\text{МГН}}$, а это, в свою очередь, приводит к увеличению $n^{\text{зап}}$, нарастание плотности нейтронов происходит по экспоненциальному закону (сплошные линии на рис. 11). Аналогично растет и плотность нейтронов n .

Показанный на рис. 11 асимптотический предел возрастания плотности мгновенных нейтронов

$$(n_1^{\text{МГН}} - n_0^{\text{МГН}}) \approx (n_1 - n_0) = \Delta n$$

является функцией возмущения по реактивности. Чем больше реактивность, тем большее значение изменения плотности мгновенных нейтронов Δn . Количественную оценку зависимости $\Delta n = f(\rho)$ можно получить из следующих рассуждений.

В критическом реакторе, когда $k_{\phi} = 1$, степень подкритичности на мгновенных нейтронах составляет $|\delta k_{\phi}^{\text{МГН}}|$, а

$$\delta k_{\phi}^{\text{МГН}} = k_{\phi}^{\text{МГН}} - 1 = (1 - \beta)k_{\phi} - 1 = -\beta.$$

Следовательно, $|\delta k_{\phi}^{\text{МГН}}| = \beta$ и, соответственно, подкритический коэффициент умножения мгновенных нейтронов в этом случае равен

$$\frac{n_0^{\text{МГН}}}{n_0^{\text{БЕР}}} = \frac{1}{|\delta k_{\phi}^{\text{МГН}}|} = \frac{1}{\beta}.$$

При положительном скачке реактивности ρ_0 степень подкритичности на мгновенных нейтронах $|\delta k_{\phi}^{\text{МГН}}|$ уменьшается до значения $\beta - \rho_0$. Соответственно, подкритический коэффициент умножения

мгновенных нейтронов возрастает и становится равным

$$\frac{n_1^{\text{МГН}}}{n_0^{\text{ист}}} = \frac{1}{\beta - \rho_0}.$$

Из сравнения двух последних соотношений следует, что

$$\frac{n_1^{\text{МГН}}}{n_0^{\text{МГН}}} = \frac{\beta}{\beta - \rho_0}.$$

Перепишем это соотношение по-другому

$$\frac{n_1^{\text{МГН}}}{n_0^{\text{МГН}}} - 1 = \frac{\beta}{\beta - \rho_0} - 1 = \frac{\beta - \beta + \rho_0}{\beta - \rho_0}; \quad \frac{n_1^{\text{МГН}} - n_0^{\text{МГН}}}{n_0^{\text{МГН}}} = \frac{\rho_0}{\beta - \rho_0},$$

откуда

$$\Delta n \approx (n_1^{\text{МГН}} - n_0^{\text{МГН}}) = n_0^{\text{МГН}} \frac{\rho_0}{\beta - \rho_0}.$$

Так как увеличение плотности мгновенных нейтронов происходит за доли секунды, величину Δn можно рассматривать как скачок плотности нейронов (так называемый скачок на мгновенных нейтронах). С учетом того, что

$$n_0^{\text{МГН}} = (1 - \beta)n_0 \approx n_0$$

(поскольку $\beta \ll 1$), выражение для Δn можно записать в более удобном для практических приложений виде:

$$\Delta n \approx n_0 \frac{\rho_0}{\beta - \rho_0} \quad (2.6)$$

и

$$\Delta n \approx n_0 \frac{\beta}{\beta - \rho_0}.$$

При очень малых скачках реактивности ($\rho_0 \ll \beta$) характер переходного процесса упрощается по сравнению с описанным выше и приближается к чисто экспоненциальному на протяжении всего периода увеличения мощности. Это можно показать с использованием уравнения обратных часов:

$$\rho_0 = \frac{\ell}{T_c} + \sum_{i=1}^6 \frac{\beta_i}{1 + \lambda_i T_c}.$$

Действительно, так как при $\rho_0 \ll \beta$ увеличение плотности нейтронов происходит очень медленно (период T_c велик), слагаемое ℓ/T_c в уравнении становится пренебрежимо малым по сравнению со вторым слагаемым и, кроме того, удовлетворяется неравенство

$\lambda_i T_c \gg 1$. В результате этого при $\rho_0 \ll \beta$ уравнение обратных часов может быть переписано в виде

$$\rho_0 \approx \frac{1}{T_e} \sum_{i=1}^6 \frac{\beta_i}{\lambda_i},$$

откуда следует

$$T_e \approx \frac{1}{\rho_0} \sum_{i=1}^6 \frac{\beta_i}{\lambda_i}.$$

Или, переходя к одной эффективной группе,

$$T_e \approx \frac{\beta}{\rho_0 \lambda}.$$

Полученное характеристическое уравнение свидетельствует о том, что переходный процесс при возмущении $\rho_0 \ll \beta$ описывается одной экспонентой и установившийся период реактора T_e не зависит от среднего времени жизни поколения мгновенных нейтронов, а определяется только возмущением ρ_0 , эффективной долей выхода запаздывающих нейтронов и средним временем жизни запаздывающих нейтронов. Вспомним рассмотренный ранее график $T_e(\rho)$ (см. рис. 6).

Точность вычисления периода реактора с использованием полученного выражения может быть увеличена, если учесть, что исходная (стационарная) доля запаздывающих нейтронов β после внесения возмущения по реактивности изменяется. Причина этого изменения вполне понятна. Поскольку стационарная доля запаздывающих нейтронов

$$\beta = \frac{n_0^{\text{зап}}}{n_0^{\text{МГН}} + n_0^{\text{зап}}},$$

а $n_0^{\text{МГН}}$ после введения реактивности увеличивается быстрее, чем $n_0^{\text{зап}}$ (см. рис. 11 для изменения плотности нейтронов при положительном скачке реактивности), динамическая доля запаздывающих нейтронов

$$\beta^* = \frac{n^{\text{зап}}}{n^{\text{МГН}} + n^{\text{зап}}} \quad (2.7)$$

при $\rho_0 > 0$ уменьшается со временем от исходного значения $\beta^*(t=0) = \beta$ до некоторого установившегося уровня $(\beta^*)_{\text{уст 1}}$, как это показано на рис. 12.

Так как при $\rho_0 = 0$ $(\beta^*)_{\text{уст}} = \beta$, а при $\rho_0 = \beta$ $(\beta^*)_{\text{уст}} \cong 0$ (поскольку реактор критичен на одних мгновенных нейтронах, вследствие чего быстро достигается неравенство $n^{\text{мн}} \gg n^{\text{зап}}$), в предположении линейной зависимости $(\beta^*)_{\text{уст}}$ от реактивности можно считать, что

$$(\beta^*)_{\text{уст}} = \beta - \rho_0.$$

С учетом этого равенства уточненная формула для расчета установленного периода при малых скачках реактивности принимает вид

$$T_e \approx \frac{\beta - \rho_0}{\rho_0 \lambda}. \quad (2.8)$$

Сходимость результатов расчета по этой формуле с точными значениями T_{e0} , получаемыми из уравнения обратных часов, будет тем выше, чем меньше возмущение ρ_0 .

Как мы уже говорили, решение уравнений кинетики при ступенчатом возмущении представляет собой сумму семи экспонент:

$$n(t) = \sum_{i=0}^6 A_i \exp(\omega_i t).$$

Раскрывая выражение для A_i , перепишем его в такой форме:

$$n(t) = n_0 \rho_0 \sum_{i=0}^6 \frac{\exp(\omega_i t)}{\omega_i \left[\ell + \sum_j \frac{\beta_j \lambda_j}{(\omega_i + \lambda_j)^2} \right]}.$$

Мы пришли к формально удобному выражению для отклика $n(t)$ на ступенчатое изменение реактивности. Отметим, что при положительных ρ_0 каждый коэффициент A_i имеет тот же знак, что и соответствующий ему ω_i , а при отрицательных ρ_0 все ω_i отрицательны, а все A_i положительны.

Пример расчетов отклика реактора, находящегося в равновесном состоянии, на различные положительные ступенчатые изменения реактивности показан на рис. 13. Отметим, что единственное слагаемое в $n(t)$, которое экспоненциально возрастает, становится в конце концов определяющим и дальнейшее развитие процесса

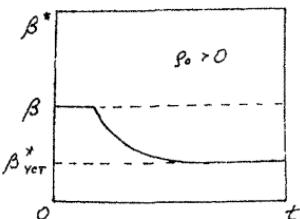


Рис. 12. Изменение динамической доли запаздывающих нейтронов при положительном скачке реактивности

происходит практически по экспоненте. Это хорошо заметно при представлении процесса в полулогарифмической системе координат (рис. 14), где через некоторое время зависимости приобретают линейный характер.

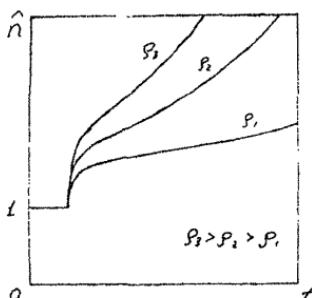


Рис. 13. Изменение плотности нейтронов при различных ступенчатых положительных возмущениях по реактивности

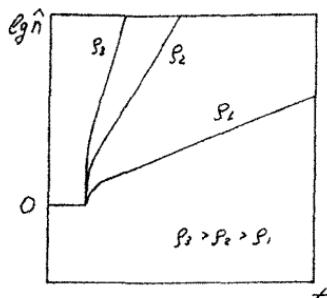


Рис. 14. Изменение плотности нейтронов при различных ступенчатых положительных возмущениях по реактивности в полулогарифмической системе координат

Отметим, что в процессе разгона реактора можно выделить две различные по скорости фазы: начальную с высокой скоростью протекания процесса (скакок на мгновенных нейтронах) и последующую, характеризующуюся относительно медленным разгоном реактора на запаздывающих нейтронах, о чем говорилось ранее. Необходимо также обратить внимание на то, что с увеличением значения возмущающего воздействия ρ_0 возрастает как величина скачка на мгновенных нейтронах, так и скорость процесса (период реактора при этом уменьшается). Приближенные выражения для одногрупповой модели запаздывающих нейтронов (2.6) и (2.8) позволяют сделать этот же вывод.

Для одной группы запаздывающих нейтронов уравнение приобретает вид

$$n(t) = n_0 \rho_0 \left\{ \frac{\exp(\omega_1 t)}{\omega_1 \left[\ell + \frac{\beta \lambda}{(\omega_1 + \lambda)^2} \right]} + \frac{\exp(\omega_2 t)}{\omega_2 \left[\ell + \frac{\beta \lambda}{(\omega_2 + \lambda)^2} \right]} \right\}.$$

График функции $n(t)$ и графики двух слагаемых этой функции, изменяющихся экспоненциально, показаны на рис. 15. Это уравнение

с некоторыми упрощениями может быть приведено к виду

$$n(t) \approx \frac{n_0}{\beta - \rho_0} \left[\beta \exp\left(\frac{\lambda\rho_0}{\beta - \rho_0} t\right) - \rho_0 \exp\left(-\frac{\beta - \rho_0}{\ell} t\right) \right].$$

Оно является полезным приближенным уравнением, справедливым при малых ρ_0 , и позволяет легко установить два важных свойства динамических процессов:

- 1) «скачок на мгновенных нейтронах» (или «спад на мгновенных нейтронах», если $\rho < 0$) происходит от единицы до значения, примерно равного $\beta/(\beta - \rho_0)$;
- 2) наиболее быстрые изменения n происходят за время порядка $\ell/(\beta - \rho_0)$.

Это уравнение позволяет также установить форму отклика на ступенчатое изменение реактивности в приближении «мгновенного скачка» ($\ell \rightarrow 0$), упоминавшемся выше. При $\ell \rightarrow 0$ величина $\frac{\beta - \rho_0}{\ell} t \gg 1$ и второе слагаемое становится пренебрежимо малым и уравнение принимает вид

$$n(t) \approx n_0 \frac{\beta}{\beta - \rho_0} \exp\left(\frac{\lambda\rho_0}{\beta - \rho_0} t\right). \quad (2.9)$$

В дальнейшем будет показано, что это отклик на ступенчатое изменение реактивности в приближении мгновенного скачка и одной эффективной группы запаздывающих нейтронов. Это означает, что отклик $n(t)$ на ступенчатое изменение реактивности может быть приближенно описан функцией, имеющей разрыв при $t = 0$ (рис. 16). Приближение мгновенного скачка будет детально обсуждаться немного позднее.

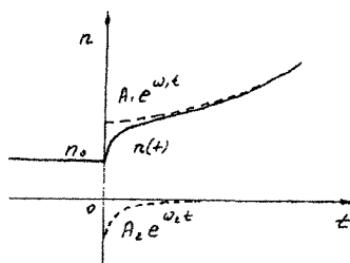


Рис. 15. Изменение составляющих плотности нейтронов для одногрупповой модели запаздывающих нейтронов при положительном скачке реактивности

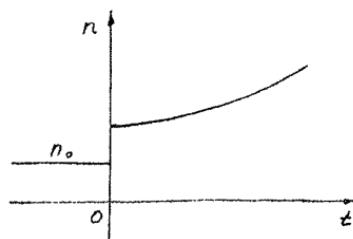


Рис. 16. Отклик на ступенчатое изменение реактивности в приближении мгновенного скачка для одной группы запаздывающих нейтронов

2.4. Анализ кинетики реактора при отрицательном скачке реактивности

Как при положительном, так и при отрицательном скачке реактивности изменение относительной плотности нейtronов во времени может быть представлено в виде суммы семи экспонент

$$n(t) = \sum_{i=1}^6 A_i \exp(\omega_i t).$$

Но здесь каждая из них имеет отрицательный показатель степени и положительный коэффициент A_i . Так же как и при положительном скачке реактивности (см. рис. 11), в данном случае начальное значение $\hat{n} = n/n_0$ в момент $t = 0$ тоже равно единице. Это значение \hat{n} получается в результате суммирования коэффициентов A_i , так как при $t = 0$ экспоненты общего решения превращаются в единицы.

Сумма текущих значений слагаемых общего решения дает исходную функцию $n(t)$. Через некоторое время при относительно небольшом отрицательном возмущении по реактивности экспоненты A_1, \dots, A_6 вырабатываются и процесс описывается единой экспонентой A_0 .

При введении большой отрицательной реактивности в начальные моменты времени картина в целом идентична. Однако через некоторое время после введения большой отрицательной реактивности темп снижения относительной плотности нейtronов целиком будет определяться скоростью уменьшения плотности запаздывающих нейtronов, генерируемых наиболее долгоживущими ядрами-предшественниками первой группы. Так как постоянная распада этих ядер-предшественников $\lambda_1 = 0,0124 \text{ с}^{-1}$, то установившийся период снижения плотности нейtronов при большом отрицательном скачке реактивности составляет $T_e^{\min} = 1/\lambda_1 = 80,6 \text{ с}$. Чем больше по абсолютной величине введенная отрицательная реактивность, тем быстрее достигается этот установившийся период. Однако снижение плотности нейtronов с установленнымся периодом менее 80,6 с ни при каких отрицательных реактивностях невозможно.

Ранее мы построили графическую зависимость установленного периода от величины реактивности для положительного

возмущения (см. рис. 6). Аналогичная зависимость для $\rho < 0$ приведена на рис. 17.

Физическая интерпретация полученной зависимости $n = f(\rho, t)$, так же как и при положительном скачке реактивности, может быть дана на основе анализа изменения во времени плотности мгновенных и запаздывающих нейтронов. При скачкообразном введении отрицательной реактивности в первую очередь резко уменьшается плотность мгновенных нейтронов. Плотность запаздывающих нейтронов в начальный период после внесения возмущения по реактивности изменяется незначительно, поскольку скорость генерации их определяется относительно высокой концентрацией ядер-предшественников, образовавшихся до внесения возмущения по реактивности, когда плотность нейтронов была выше текущей. Со временем плотность запаздывающих нейтронов начинает уменьшаться из-за снизившейся плотности мгновенных нейтронов, что в свою очередь приводит и к уменьшению плотности мгновенных нейтронов. А зависимость $n(t)$ — это результат сложения зависимостей для мгновенных и запаздывающих нейтронов.

Так же как и при положительном скачке реактивности, начало переходного процесса при введении отрицательной реактивности характеризуется скачком плотности нейтронов, только теперь в сторону уменьшения. Скачок Δn тем больше, чем больше по абсолютной величине введенная отрицательная реактивность. Для количественной оценки зависимости $\Delta n = f(\rho)$ может быть использовано полученное ранее выражение $\Delta n \approx n_0 \frac{\rho_0}{\beta - \rho_0}$, однако в данном случае отрицательный знак реактивности целесообразно учесть отдельно, а возмущение по реактивности взять по абсолютной величине:

$$\Delta n \approx -n_0 \frac{|\rho_0|}{\beta + |\rho_0|}.$$

Сравнив это выражение с выражением для Δn при положительном возмущении по реактивности (2.6), легко убедиться, что при

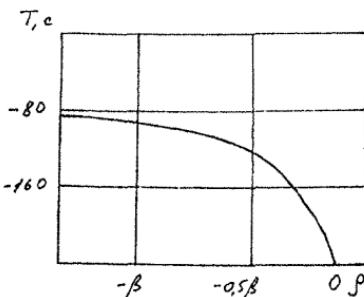


Рис. 17. Зависимость установившегося периода реактора от реактивности при отрицательном возмущении

одинаковых по абсолютной величине положительном и отрицательном скачках реактивности значение Δn больше в случае высвобождения положительной реактивности.

Существующее неравенство скачков плотности нейтронов и различные скорости установившихся процессов при одинаковых по абсолютной величине изменениях реактивности объясняется влиянием изменения динамической доли запаздывающих нейтронов на характер переходного процесса. При $\delta k_{\text{эф}} > 0$ динамическая доля запаздывающих нейтронов β^* , определяемая соотношением (2.7), уменьшается и соответствующее нормированное значение возмущения $\hat{\rho} = \rho/\beta^*$ становится больше стационарного значения $\hat{\rho}_0 = \rho/\beta$. В случае $\delta k_{\text{эф}} < 0$ имеет место обратное соотношение, β^* увеличивается и $\hat{\rho} < \hat{\rho}_0$. А чем больше именно нормированное значение возмущения $\hat{\rho}$, тем более интенсивно при прочих равных условиях развивается цепная реакция размножения нейтронов. Это проявляется и в величине скачка плотности нейтронов Δn , и в значении установленного периода T_e .

Выражение, определяющее установленный период при отрицательном скачке реактивности, может быть получено с использованием рассмотренной ранее зависимости $T_e \approx \frac{\beta - \rho_0}{\rho_0 \lambda}$, которая после преобразований с учетом отрицательного знака реактивности имеет вид

$$T_e \approx -\frac{\beta + |\rho_0|}{|\rho_0| \lambda}.$$

Но всегда $|T_e| \geq |T_e^{\text{min}}| = 80,6$ с. Вспомним зависимость $T_e(\rho)$, приведенную на рис. 17. Математически эту зависимость можно объяснить тем, что при больших отрицательных возмущениях рассчитанный по данной формуле период T_e не является наибольшим, и процесс развивается по экспоненте A_1 с периодом 80,6 секунд.

Сопоставление этого выражения с выражением для T_e при положительном возмущении по реактивности подтверждает сделанный вывод о том, что положительному скачку реактивности соответствует меньший по абсолютной величине период, чем такому же по абсолютной величине отрицательному скачку. Однако следует отметить ограниченную область применимости приведенной формулы для периода при отрицательной реактивности.

2.5. Модель мгновенного скачка

Рассмотрим упрощающие приближения, некоторые из них уже использовались ранее. Ценность моделей с упрощающими приближениями заключается в том, что они часто позволяют найти в аналитической форме пределы, между которыми находятся точные решения (обычно получаемые только с помощью электронных вычислительных машин), благодаря этому достигается такое понимание процессов, которого трудно добиться другими способами. Некоторые из этих приближенных решений имеют также и прямое практическое значение, поэтому мы исследуем и допустимые области их применения.

Приближенным методом, который мы рассмотрим, является «приближение мгновенного скачка», или «метод мгновенного скачка» (сокращенно ММС) или, как его иногда называют, «приближение нулевого времени жизни», что отвечает физическому смыслу этого приближения. Этот метод уже был использован ранее, когда был получен предельный вид уравнения обратных часов

$$\rho = \sum_i \frac{\beta_i \omega}{\omega + \lambda_i} \text{ при } \ell \rightarrow 0.$$

Позднее было установлено, что формула

$$n(t) \approx n_0 \frac{\beta}{\beta - \rho_0} \exp\left(\frac{\lambda \rho_0}{\beta - \rho_0} t\right)$$

выражает отклик реактора в этом приближении на ступенчатое изменение реактивности при одной эффективной группе запаздывающих нейтронов.

Рассмотрим получение этой модели из анализа дифференциальных уравнений, соответствующих точечной модели реактора. Запишем уравнения кинетики в таком виде:

$$\frac{dn}{dt} = \frac{\rho(t) - \beta}{\ell} n + \sum_i \lambda_i c_i + q(t); \quad (2.10)$$

$$\frac{dc_i}{dt} = \frac{\beta_i}{\ell} n - \lambda_i c_i. \quad (2.11)$$

Записью $\rho(t)$ и $q(t)$ в такой форме подчеркиваем, что эти параметры могут в общем случае быть зависимы от времени, как внешние функции. Реактор при этом холодный.

Когда время жизни ℓ мало и $\rho < \beta$, правая часть первого уравнения содержит большой отрицательный член $\frac{\rho - \beta}{\ell} n$. В таких

случаях производная dn/dt часто оказывается малой разностью двух больших величин: отрицательной $\frac{\rho - \beta}{\ell} n$ и положительной $\sum_i \lambda_i c_i + q$, поскольку при малых возмущениях ρ скорость процесса dn/dt невелика. Это означает, что может быть получено полезное приближение, если в этом уравнении пренебречь производной dn/dt , а уравнение для c_i оставить неизменным. При этом, конечно, плотность нейтронов n остается функцией времени.

Рассуждая далее формально, применим разложение нейтронной плотности в ряд по степеням малого параметра ℓ . Пусть

$$n = n_1 + \ell n_2 + \dots$$

и

$$\frac{dn}{dt} = \frac{dn_1}{dt} + \ell \frac{dn_2}{dt} + \dots$$

В результате подстановки разложения в уравнение для плотности нейтронного потока n (2.10) находим:

$$\frac{dn_1}{dt} + \ell \frac{dn_2}{dt} = \frac{\rho - \beta}{\ell} n_1 + (\rho - \beta) n_2 + \sum_i \lambda_i c_i + q + \dots \quad (2.12)$$

Из уравнений для равновесного состояния реактора (2.4) оценим связь c_i и q со временем жизни мгновенных нейтронов

$$n_0 = \frac{\ell q_0}{|\rho_0|},$$

откуда

$$q_0 = \frac{|\rho_0|}{\ell} n_0$$

и

$$c_{i0} = \frac{\beta_i n_0}{\lambda_i \ell}.$$

Находим, что значения функций c_i и q по отношению к значениям функции n при изменении ℓ изменяются как $\frac{1}{\ell}$ ($q \sim \frac{n}{\ell}$ и $c_i \sim \frac{n}{\ell}$). Такое же соотношение между этими функциями будет иметь место и при относительно медленно протекающих нестационарных процессах, какие мы и рассматриваем в настоящем подразделе ($\rho < \beta$).

Предполагая, что производные по времени в последнем уравнении для n пренебрежимо малы, и сохраняя только члены порядка $\frac{1}{\ell}$, находим, что

$$0 = \frac{\rho - \beta}{\ell} n_1 + \sum_i \lambda_i c_i + q,$$

откуда

$$n_1 = \frac{\sum_i \lambda_i \ell c_i + \ell q}{\beta - \rho}. \quad (2.13)$$

Эта функция n_1 , удовлетворяющая уравнению кинетики, когда dn/dt достаточно мала и ею можно пренебречь, описывает нейтронную плотность в приближении мгновенного скачка. Отметим, что n_1 удовлетворяет системе дифференциальных уравнений, порядок которых понижен на единицу.

Продолжая рассмотрение, вернемся к уравнению для n с представленным разложением (2.12) и приравняем члены порядка ℓ^0

$$\frac{dn_1}{dt} = (\rho - \beta)n_2.$$

Следовательно,

$$n_2 = \frac{1}{\rho - \beta} \frac{dn_1}{dt} = -\frac{1}{\beta - \rho} \frac{dn_1}{dt}.$$

Используя уравнение (2.13) для нахождения производной, получаем:

$$\frac{dn_1}{dt} = \frac{\left(\sum_i \lambda_i \ell \frac{dc_i}{dt} + \ell \frac{dq}{dt} \right) (\beta - \rho) - \left(\sum_i \lambda_i \ell c_i + \ell q \right) \left(-\frac{d\rho}{dt} \right)}{(\beta - \rho)^2}$$

и

$$n_2 = -\frac{1}{(\beta - \rho)^2} \left(\sum_i \lambda_i \ell \frac{dc_i}{dt} + \ell \frac{dq}{dt} + \frac{\sum_i \lambda_i \ell c_i + \ell q}{\beta - \rho} \frac{d\rho}{dt} \right).$$

Теперь уравнение $n = n_1 + \ell n_2 + \dots$ принимает вид

$$n = \frac{\sum_i \lambda_i \ell c_i + \ell q}{\beta - \rho} - \frac{\ell}{(\beta - \rho)^2} \left(\sum_i \lambda_i \ell \frac{dc_i}{dt} + \ell \frac{dq}{dt} + \frac{\sum_i \lambda_i \ell c_i + \ell q}{\beta - \rho} \frac{d\rho}{dt} \right). \quad (2.14)$$

Это асимптотический ряд по степеням ℓ , который расходится, если $\rho \rightarrow \beta$; первый член этого ряда соответствует приближению мгновенного скачка.

Поскольку функция n_1 удовлетворяет системе дифференциальных уравнений пониженного порядка, при ее интерпретации как функции, описывающей поведение плотности нейтронов приближенно и получаемой из уравнения кинетики при $dn/dt = 0$, подразумевается, что одно начальное условие оказывается потерянным. Объяснение этому состоит в том, что быстро «спадающая» переходная часть решения отсутствует в приближенном выражении для плотности нейтронов. Например, как мы убедились ранее, определяемая формулой $n(t) \approx n_0 \frac{\beta}{\beta - \rho_0} \exp\left(\frac{\lambda\rho_0}{\beta - \rho_0} t\right)$ функция, приближенно описывающая отклик реактора при ступенчатом входном сигнале, не является непрерывной при $t = 0$. При выводе упомянутой формулы слагаемое, описывающее переходный процесс с постоянной времени $\frac{\ell}{\beta - \rho_0}$, было заменено скачкообразным изменением плотности нейтронов n при $t = 0$.

«Потерянное начальное условие» заменяется в этом приближении требованием непрерывности произведения $(\beta - \rho)n$, что следует из уравнения $\frac{dn}{dt} = \frac{\rho - \beta}{\ell} n + \sum_i \lambda_i c_i + q$, где производная dn/dt положена равной нулю согласно приближению мгновенного скачка, а функции q и c_i непрерывны. Заметим, что согласно уравнению $\frac{dc_i}{dt} = \frac{\beta_i}{\ell} n - \lambda_i c_i$, функции c_i непрерывны даже при наличии в функции $n(t)$ разрыва конечной величины. Таким образом, для приближенной функции, описывающей изменение плотности нейтронов в случае ступенчатого изменения реактивности, выполняется условие

$$n(+0) = \frac{\beta - \rho(-0)}{\beta - \rho(+0)} n(-0).$$

Из выражения для n_1 находим, что для одной группы запаздывающих нейтронов функция, приближенно описывающая изменение плотности нейтронов, имеет вид

$$n_1 = \frac{\lambda \ell c + \ell q}{\beta - \rho}.$$

Если из этой формулы найти концентрацию ядер предшественников

$$\begin{aligned} n_1 \beta - n_1 \rho &= \lambda \ell c + \ell q; \\ c &= \frac{n_1 \beta - n_1 \rho - \ell q}{\lambda \ell} \end{aligned}$$

и выражение для ее производной по времени

$$\frac{dc}{dt} = \frac{1}{\lambda\ell} \left(\beta \frac{dn_1}{dt} - \rho \frac{dn_1}{dt} - n_1 \frac{d\rho}{dt} - \ell \frac{dq}{dt} \right)$$

и подставить в дифференциальное уравнение для c (2.11)

$$\frac{dc}{dt} = \frac{\beta}{\ell} n - \lambda c,$$

то получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda\ell} \left(\beta \frac{dn_1}{dt} - \rho \frac{dn_1}{dt} - n_1 \frac{d\rho}{dt} - \ell \frac{dq}{dt} \right) &= \frac{\beta}{\ell} n_1 - \frac{n_1 \beta}{\ell} + \frac{n_1 \rho}{\ell} + \frac{\ell q}{\ell} \\ \beta \frac{dn_1}{dt} - \rho \frac{dn_1}{dt} - n_1 \frac{d\rho}{dt} - \ell \frac{dq}{dt} &= \lambda n_1 \rho + \lambda \ell q. \end{aligned}$$

Придем к следующему результату:

$$(\beta - \rho) \frac{dn_1}{dt} - \left(\lambda \rho + \frac{d\rho}{dt} \right) n_1 = \lambda \ell q + \ell \frac{dq}{dt}. \quad (2.15)$$

Это дифференциальное уравнение первого порядка для плотности нейтронов в приближении мгновенного скачка. Для заданного изменения во времени мощности источника нейтронов путем решения этого уравнения можно найти функцию n_1 , а затем по формуле для концентрации запаздывающих нейтронов — функцию c , описывающую изменение во времени плотности предшественников запаздывающих нейтронов (если в этом есть необходимость).

В том случае, когда в реакторе, находящемся в равновесном состоянии без источника, происходит ступенчатое изменение реактивности, решением, удовлетворяющим условию непрерывности произведения $(\beta - \rho)n$, является формула (2.9) $n(t) \approx n_0 \frac{\beta}{\beta - \rho_0} \times \exp\left(\frac{\lambda \rho_0}{\beta - \rho_0} t\right)$, полученная ранее. На рис. 15, 16 было показано, как первоначальное быстрое нарастание функции плотности нейтронного потока n заменяется скачкообразным ее изменением при $t = 0$.

Действительно, если пренебречь источником, то

$$(\beta - \rho) \frac{dn_1}{dt} - \left(\lambda \rho + \frac{d\rho}{dt} \right) n_1 = 0.$$

При скачкообразном возмущении $d\rho/dt = 0$ и тогда

$$(\beta - \rho) \frac{dn_1}{dt} - \lambda \rho n_1 = 0;$$

$$\frac{1}{n_1} \frac{dn_1}{dt} = \frac{\lambda\rho}{\beta - \rho},$$

откуда

$$n_1 = n_{10} \exp\left(\frac{\lambda\rho}{\beta - \rho} t\right),$$

а n_{10} определяется из условия непрерывности $(\beta - \rho)n$:

$$n_{10} = \frac{\beta - \rho(-0)}{\beta - \rho(+0)} n_0 = \frac{\beta}{\beta - \rho_0} n_0,$$

следовательно,

$$n_1 = \frac{\beta}{\beta - \rho_0} n_0 \exp\left(\frac{\lambda\rho_0}{\beta - \rho_0} t\right).$$

В принципе, при условии, что уравнение $n = n_1 + \ell n_2$ справедливо, о пригодности приближения мгновенного скачка можно судить, сравнивая между собой члены асимптотического степенного ряда. Количественный критерий пригодности легко получить в случае одной группы запаздывающих нейтронов. Для одной группы запаздывающих нейтронов и в отсутствие источника уравнение (2.14) принимает вид

$$n = \frac{\lambda\ell c}{\beta - \rho} - \frac{\ell}{(\beta - \rho)^2} \left(\lambda\ell \frac{dc}{dt} + \frac{\lambda\ell c}{\beta - \rho} \frac{d\rho}{dt} \right). \quad (2.16)$$

Подставляя первый член этого ряда в уравнение для концентрации предшественников запаздывающих нейтронов $\frac{dc}{dt} = \frac{\beta}{\ell} n - \lambda c$

$$\frac{dc}{dt} = \frac{\beta}{\ell} \frac{\lambda\ell c}{\beta - \rho} - \lambda c = \frac{\beta\lambda c - \beta\lambda c + \rho\lambda c}{\beta - \rho},$$

получаем приближенное выражение для dc/dt :

$$\frac{dc}{dt} = \frac{\rho\lambda}{\beta - \rho} c.$$

Теперь уравнение для n можно записать так:

$$n = \frac{\lambda\ell c}{\beta - \rho} - \frac{\ell}{(\beta - \rho)^2} \left(\lambda\ell \frac{\lambda\rho}{\beta - \rho} + \frac{\lambda\ell c}{\beta - \rho} \frac{d\rho}{dt} \right)$$

и

$$n = \frac{\lambda\ell c}{\beta - \rho} \left[1 - \frac{\ell}{(\beta - \rho)^2} \left(\lambda\rho + \frac{d\rho}{dt} \right) \right]. \quad (2.17)$$

Мы приходим к заключению, что для одной группы запаздывающих нейтронов и в отсутствие источника приближение мгновенного скачка, которому соответствует формула

$$n \approx n_1 = \frac{\lambda \ell c}{\beta - \rho},$$

может с успехом использоваться в тех случаях, при которых предыдущая формула (2.16) справедлива и ее второе слагаемое мало по сравнению с первым. Другими словами, приближенным условием пригодности в этом частном случае приближения мгновенного скачка является условие

$$\beta - \rho \gg \sqrt{\left(\ell \left| \lambda \rho + \frac{d\rho}{dt} \right| \right)}. \quad (2.18)$$

Отметим, что если ℓ мало, приближением можно пользоваться и при ρ , близких к β .

Этим условием нельзя пользоваться, если производная dn/dt очень велика, как это имеет место при быстром изменении плотности нейтронов, непосредственно следующем за ступенчатым изменением реактивности, или при очень быстрых осцилляциях. В таких случаях наши основные предположения об относительной величине различных слагаемых в уравнении не выполняются и полученный на основании этих предположений асимптотический степенной ряд оказывается неправильным. Основным условием пригодности приближения мгновенного скачка, как уже упоминалось ранее, является условие

$$\left| \frac{dn}{dt} \right| \ll \frac{\beta - \rho}{\ell} n. \quad (2.19)$$

Но при такой форме трудно говорить об области пригодности из-за производной в выражении, наличие которой затрудняет сравнительную оценку членов соотношения.

Это соотношение может быть использовано для вывода предыдущего условия (2.18). Из полученного ранее уравнения (2.15) при $q = 0$ следует, что функция, приближенно описывающая изменение плотности нейтронов, удовлетворяет уравнению

$$(\beta - \rho) \frac{dn}{dt} = \left(\lambda \rho + \frac{d\rho}{dt} \right) n.$$

Домножим левую и правую части на $(\beta - \rho)$, а правую часть домножим и поделим на ℓ :

$$(\beta - \rho)^2 \frac{dn}{dt} = \ell \left(\lambda \rho + \frac{d\rho}{dt} \right) \frac{\beta - \rho}{\ell} n.$$

Если $\left| \frac{dn}{dt} \right| \ll \frac{\beta - \rho}{\ell} n$, то предыдущее равенство справедливо только в том случае, если

$$(\beta - \rho)^2 \gg \ell \left| \lambda \rho + \frac{d\rho}{dt} \right|,$$

или, как мы записывали ранее (2.18):

$$\beta - \rho \gg \sqrt{\left(\ell \left| \lambda \rho + \frac{d\rho}{dt} \right| \right)}.$$

Таким образом, мы пришли к условию, которое дает ответ на вопрос: как близко к точке мгновенной критичности можно пользоваться приближением мгновенного скачка в случае одной группы запаздывающих нейтронов и в отсутствие источника, если условие $\left| \frac{dn}{dt} \right| \ll \frac{\beta - \rho}{\ell} n$ выполнено.

Следует заметить, что на основании полученного условия нельзя судить о возможности использования приближения мгновенного скачка с одной группой запаздывающих нейтронов вместо точной модели с шестью группами. Одна эффективная группа запаздывающих нейтронов не может заменить шесть в общем случае произвольной зависимости реактивности от времени. Тем не менее, это условие позволяет оценить максимальную реактивность, при которой еще допустимо использование приближения мгновенного скачка. Поскольку наибольший интерес представляет вопрос о том, насколько близка эта максимальная реактивность к точке мгновенной критичности ($\rho = \beta$), полученное условие может быть заменено условием

$$\beta - \rho \gg \sqrt{\left(\ell \left| \lambda \beta + \frac{d\rho}{dt} \right| \right)}.$$

Это оценка сверху, замена идет «в запас».

Для больших скоростей изменения реактивности

$$\beta - \rho \gg \sqrt{\left(\ell \left| \frac{d\rho}{dt} \right| \right)},$$

а для малых

$$\beta - \rho \gg \sqrt{\ell \lambda \beta}.$$

Это неравенство можно использовать в качестве критерия пригодности приближения мгновенного скачка. Им можно пользоваться только при малых скоростях изменения реактивности.

Пронормируем неравенство на долю запаздывающих нейтронов β

$$1 - \frac{\rho}{\beta} \gg \sqrt{\frac{\ell \lambda}{\beta}},$$

или

$$1 - \hat{\rho} \gg \sqrt{\frac{\ell}{\beta} \lambda}.$$

Заменим неравенство равенством, где коэффициент перед корнем выберем из условия точности выполнения приближения. Чтобы второй член разложения был на порядок меньше первого, множитель должен быть равен $\sqrt{10}$, или ≈ 3 .

$$1 - \hat{\rho} = 3 \sqrt{\frac{\ell}{\beta} \lambda},$$

откуда

$$\hat{\rho} = 1 - 3 \sqrt{\frac{\ell}{\beta} \lambda}.$$

Построим зависимость максимальной реактивности, при которой приближение мгновенного скачка справедливо с принятой точностью ($\sim 10\%$) от параметра β/ℓ (рис. 18). По сути, эту же зависимость можно построить в функции от времени жизни ℓ . На этом же графике построена и зависимость для точности $\sim 1\%$ (различие членов на два порядка) (рис. 19). Представленные зависимости показывают, насколько широко может применяться приближение мгновенного скачка.

Даже для представленных на рис. 19 значений времени жизни мгновенных нейтронов, равных 10^{-3} с, модель мгновенного скачка может использоваться с погрешностью не выше 10% вплоть до значений нормированной реактивности $\hat{\rho} = 0,7$. Время жизни 10^{-3} с принято как максимально возможное значение. В то же время, в реальных водо-водяных реакторах время жизни мгновенных нейтронов скорее ближе к 10^{-4} с, что еще более расширяет область использования рассматриваемой модели вплоть до $\hat{\rho} \cong 0,86$.

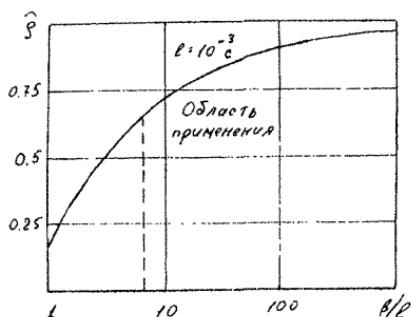


Рис. 18. Зависимость максимальной реактивности, при которой приближение мгновенного скачка справедливо с точностью 10% от параметра β/ℓ

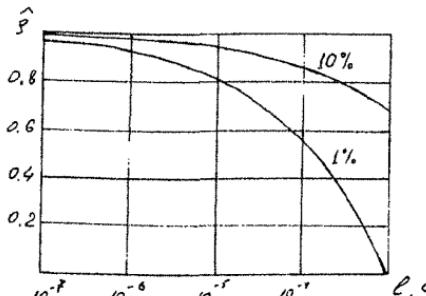


Рис. 19. Зависимость максимальной реактивности, при которой приближение мгновенного скачка справедливо с различной точностью от времени жизни мгновенных нейтронов

для 10%-ной допустимой погрешности и $\hat{\rho} \cong 0,55$ для 1%-ной погрешности.

Это достаточно высокие значения реактивности, если учесть, что максимально допустимое единоразовое введение положительной реактивности, согласно Правилам ядерной безопасности, не может превышать $0,3\beta$ ($\hat{\rho} = 0,3$). Таким образом, если допустимо использовать одногрупповое приближение запаздывающих нейтронов вместо шестигруппового при заданной допустимой погрешности, то применение модели мгновенного скачка не приводит к погрешности, превышающей заданную, что и обуславливает широкое использование этого приближения.

Список литературы

1. Емельянов И. Я., Ефанов А. И., Константинов Л. В. Научно-технические основы управления ядерными реакторами. М.: Энергоиздат, 1981. 360 с.
2. Хетрик Д. Динамика ядерных реакторов: Пер. с англ. М.: Атомиздат, 1975. 400 с.
3. Судовые ядерные энергетические установки / А. М. Головизнин, В. А. Кузнецов, Б. Г. Пологих и др.; Под ред. В. А. Кузнецова. М.: Атомиздат, 1976. 376 с.
4. Дементьев Б. А. Кинетика и регулирование ядерных реакторов. М.: Энергоатомиздат, 1984. 272 с.
5. Саркисов А. А., Пучков В. Н. Физика переходных процессов в ядерных реакторах. М.: Энергоатомиздат, 1983. 232 с.

Оглавление

Введение	3
Глава 1. Уравнения кинетики реактора	4
1.1. Основные положения кинетики реактора	4
1.2. Основные понятия кинетики и динамики ядерных реакторов	7
1.3. Элементарное уравнение кинетики	14
1.4. Базовые уравнения кинетики реактора	18
1.5. Нормировка уравнений кинетики	24
1.6. Уравнение обратных часов	26
1.7. Одногрупповые представления	33
Глава 2. Постоянная реактивность и ступенчатые изменения реактивности	38
2.1. Равновесие и критичность	39
2.2. Подкритический реактор	40
2.3. Анализ кинетики реактора при положительном скачке реактивности	46
2.4. Анализ кинетики реактора при отрицательном скачке реактивности	54
2.5. Модель мгновенного скачка	57
Список литературы	67